

欧拉陀螺

可以求得解析解的陀螺系统有三种：

① 欧拉陀螺

② 拉格朗日陀螺

③ 柯瓦列夫斯卡娅陀螺

先讨论第一种可解的刚体模型

欧拉陀螺的首次积分

- 欧拉陀螺

欧拉陀螺又称为自由刚体，

- ① 不受外力矩的作用
- ② 作定点转动

- 欧拉陀螺的拉氏函数是

$$L = T = \frac{1}{2} \sum_P m_P \dot{\vec{r}}_P^2 = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

- 在主轴系，欧拉动力学方程是

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

- 守恒量

- ① 拉氏量不含时，动能守恒

- ② 拉氏量转动不变，惯性系中的角动量各分量都守恒

- 在随体系，

- ① $\vec{J}'^2 = \vec{J}^2$ 是守恒量（转动不改变矢量模长）

- ② $\vec{J}'$ 的各个分量 (J_1, J_2, J_3) 不是守恒量

欧拉陀螺的解

- 利用守恒量消去 ω_1, ω_2 ,

$$\begin{cases} I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = J^2 \\ \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = T \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{(I_2 - I_3)I_3 \omega_3^2 - 2I_2 T + J^2}{(I_1 - I_2)I_1} \\ \omega_2^2 = \frac{(I_1 - I_3)I_3 \omega_3^2 - 2I_1 T + J^2}{(I_2 - I_1)I_2} \end{cases}$$

- 代入第三个Euler动力学方程得

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2$$

- 把上述方程变形, 然后积分, 即可解出 $\omega_3(t)$ (是椭圆积分), $\omega_3(t)$ 是时间 t 的周期函数

可参考H. H蒲赫哥尔兹, 《理论力学基本教程(下)》, 第4章第7节。

- 然后把 $\vec{\omega}(t)$ 再代入Euler运动学方程, (数值)积分可得角位移或欧拉角。
- 解析表达式复杂, 这里不列出

欧拉陀螺的稳定性

- 考虑无外力矩作用的自由刚体，运动方程是

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2$$

不妨设 $I_1 < I_2 < I_3$

- 如果初始时刻刚体沿2轴转动，

$$\omega_1, \omega_3 \approx 0, \quad \omega_2 \gg \omega_1, \omega_3$$

对第一个方程取微商，然后将第二、第三个方程代入，

$$I_1 \ddot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \{ \dot{\omega}_2 \omega_3 + \omega_2 \dot{\omega}_3 \}$$

$$= (I_2 - I_3) \left\{ \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3 \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \omega_2 \right\}$$

$$= (I_2 - I_3) \left\{ \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3^2 + \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_2^2 \right\} \omega_1$$

$$\approx (I_2 - I_3) \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_2^2 \omega_1$$

$$\ddot{\omega}_1 = \text{正数} \times \omega_1$$

类似的有

$$\ddot{\omega}_3 = \text{正数} \times \omega_3$$

$\omega_1(t), \omega_3(t)$ 将指数增长，刚体角速度迅速偏离原本的方向。**不稳定。**

- 如果初始时刻刚体沿1轴转动，

$$\omega_2, \omega_3 \approx 0, \quad \omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$$

则

$$\begin{aligned} I_2 \ddot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \{ \dot{\omega}_3 \omega_1 + \omega_3 \dot{\omega}_1 \} \\ &= (I_3 - I_1) \left\{ \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \omega_2 \omega_1 + \omega_3 \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2 \omega_3 \right\} \\ &= - \left\{ \frac{I_1 - I_2}{I_3} (I_1 - I_3) \omega_1^2 + \frac{I_2 - I_3}{I_1} (I_1 - I_3) \omega_3^2 \right\} \omega_2 \\ &\approx - \frac{I_1 - I_2}{I_3} (I_1 - I_3) \omega_1^2 \omega_2 \end{aligned}$$

$$\ddot{\omega}_2 = \text{负数} \times \omega_2$$

同样可得

$$\ddot{\omega}_3 = \text{负数} \times \omega_3$$

$\omega_2(t), \omega_3(t)$ 将类似三角函数震荡，刚体角速度方向基本保持不变。**稳定。**

- 如果初始时刻刚体沿3轴转动，

稳定。

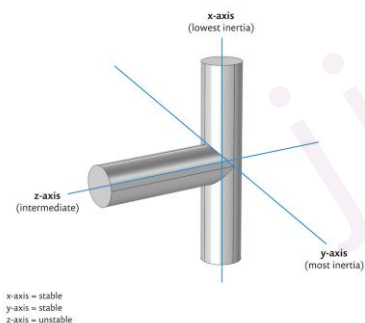
贾尼别可夫效应

● 贾尼别可夫效应 (Dzhanibekov effect)

发现于1985年，苏联礼炮7号空间站。保密记录，6年后被数学家独立发现并发表。

又称**中间轴定理** (the intermediate axis theorem)、网球拍定理 (tennis racket theorem)：

自由刚体沿着 I_1, I_3 方向（转动惯量最小或最大）的转动是稳定的，沿 I_2 方向的转动是不稳定的。



图源：
<https://www.comsol.com/blogs/why-do-tennis-rackets-tumble-the-dzhanibekov-effect-explained>

● 应用：惯性导航系统 (Inertial Navigation System, INS)



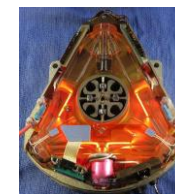
TZ-3三自由度机械陀螺仪



美国“和平卫士”洲际导弹的高级惯性参考球 (AIRS)，液浮圆概率误差 (CEP) 40米



高精度MEMS陀螺仪HT-GYRO-210



霍尼韦尔GG1342氦氖环形激光陀螺



GY-521模组，集成了MEMS加速度计和陀螺仪的6轴传感器，以及处理器MPU6050芯片；可外接磁力计。

可输出转动矩阵、四元数或欧拉角。

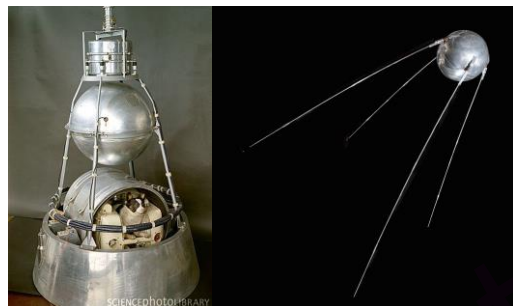
封装尺寸 $4 \times 4 \times 0.9\text{mm}$ 。

价格¥ 6.50

准刚体的稳定性*



苏联斯普特尼克1号卫星



苏联斯普特尼克2号卫星



美国探险者1号卫星



银河系统最大惯性主轴，
稳定旋转了130亿年

- 1957年10月4日苏联发射第一颗人造卫星Sputnik 1，利用绕对称轴的旋转，稳定了卫星的朝向。
- 1957年11月3日苏联，发射Sputnik 2。设计希望Sputnik 2绕锥体的对称轴旋转，但入轨后卫星发生了激烈的翻滚，使收集数据变得异常困难。
- 1957年12月6日美国海军试射了一颗卫星，上升2m后发生了爆炸。
- 1958年1月31日美国成功发射了Explorer 1卫星。

按设计探险者卫星绕对称轴（最小惯性主轴）旋转，但在运行不久后，变成了绕垂直于对称轴的轴旋转（最大惯性主轴）。

- 天线等柔性结构，导致能量耗散；总角动量守恒：

$$E = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \quad \omega_i = J_i/I_i \quad \Rightarrow \quad \textcircled{1} E = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ I_1 \leq I_2 \leq I_3 \\ J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E \geq \frac{J^2}{2I_3}$$

绕最大惯量主轴旋转稳定

绕最小惯量主轴旋转不稳定

从瞬轴轨迹看稳定性

- 转动动能守恒，在主轴系

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 2T$$

即惯量椭球面方程

$$I_1x^2 + I_2y^2 + I_3z^2 = 1$$

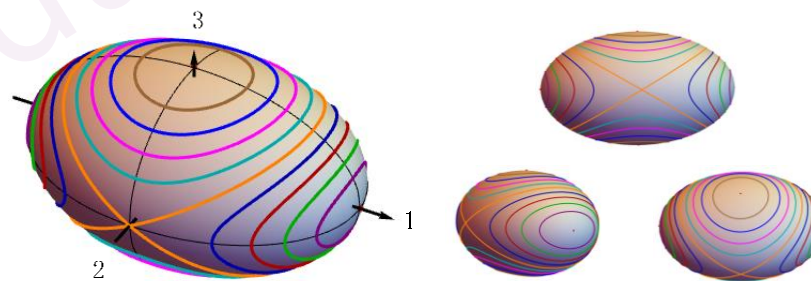
- 角动量大小不变

$$I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = J^2$$

即（等角动量）椭球面方程

$$I_1^2x^2 + I_2^2y^2 + I_3^2z^2 = \frac{J^2}{2T}$$

- 由于 T, J^2 守恒，两个椭球面的交线，是瞬轴在惯量椭球上的可能轨迹



从图上可以看出：

绕1-轴的转动和绕3-轴的转动是稳定的，
绕2-轴的转动是不稳定的，
与前面推导出的网球拍定理一致。

Poinsot定理

- 在随体系中观察，设P点为惯量椭球与瞬轴的交点，坐标是

$$\vec{r}_p = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_n}} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{I_n}\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$$

P点满足方程

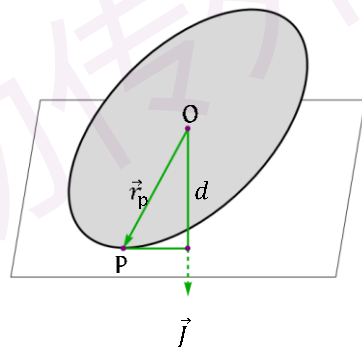
$$I_1 x_p^2 + I_2 y_p^2 + I_3 z_p^2 = 1$$

- 惯量椭球在P点的切平面的法向量是

$$\begin{aligned} \nabla_P (I_1 x_p^2 + I_2 y_p^2 + I_3 z_p^2) &= 2(I_1 x_p \quad I_2 y_p \quad I_3 z_p)^T \\ &= 2\vec{I} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}} = 2 \frac{\vec{J}}{\sqrt{2T}} \propto \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} \end{aligned}$$

- 所以切平面方程是

$$\vec{r} \cdot \vec{J} / |\vec{J}| = d$$



- 切平面上的点P点，同时也在惯量椭球面上，所以截距为

$$\begin{aligned} d &= \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} \cdot \vec{r}_p = \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{J}|} \frac{\vec{J}}{\sqrt{2T}} \cdot \vec{r}_p \\ &= \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{J}|} (I_1 x_p \quad I_2 y_p \quad I_3 z_p)^T \cdot \vec{r}_p \\ &= \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{J}|} (I_1 x_p^2 + I_2 y_p^2 + I_3 z_p^2) = \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{J}|} \end{aligned}$$

- 在惯性系中看，切平面的法向是角动量，所以不变。
- 在惯性系中看，参考点（定点转动的定点，或质心参考系的质心）不动，且参考点到切平面的距离d是常数。

- 总之，

在惯性系中，切平面静止不动（称为不动平面），惯量椭球在不动平面上作纯滚动

欧拉对称陀螺-动力学方程的解析解

- 欧拉陀螺可解，但是表达式是复杂的特殊函数

- 如果陀螺是对称的，解会比较简单：

$$I_1 = I_2$$

且不受外力，在主轴系中动力学方程为

$$\begin{cases} 0 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 \\ 0 = I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ 0 = I_3 \dot{\omega}_3 \end{cases}$$

- 求解动力学方程，由第三个方程得

$$\omega_3 = \text{常数}$$

- 记进动角速度为

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$$

- 动力学方程成为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega}_1 = -\Omega^2 \omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 = -\Omega^2 \omega_2 \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) \end{cases}$$

- 角速度的大小

$$\omega = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_h^2}$$

是常数。

- 角速度矢端在主轴系水平面中的投影（模长是常数 ω_h ），以圆频率 Ω 作圆周运动。

规则进动

- 在惯性系中角动量守恒，不妨以之为惯性系的z轴方向

- 则随体系角动量分量是

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = R^{-1}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \sin \theta \sin \psi \\ J \sin \theta \cos \psi \\ J \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 继续积分，第三个动力学方程是

$$0 = I_3 \dot{\omega}_3$$

即

$$\begin{aligned} \dot{J}_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \\ \frac{d}{dt}(J \cos \theta) &= 0 \\ \theta(t) &= \theta_0 \end{aligned}$$

- 对称欧拉陀螺自由运动，章动角不变，只有进动角和自转角在变化，称之为规则进动。

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & -\cos \theta \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

运动学方程的解析解

- 把刚才得到的欧拉动力学方程的解

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) \\ \omega_3 = \cos \theta_0 \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

代入欧拉运动学方程,

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) = \sin \theta_0 \sin \psi \dot{\phi} \\ \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) = \sin \theta_0 \cos \psi \dot{\phi} \\ \omega_3 = \cos \theta_0 \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

- 前两个方程相除解出 $\psi(t)$,

$$\psi(t) = \frac{\pi}{2} - (\Omega t + \alpha) \equiv -\Omega t + \psi_0$$

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} - \psi_0$$

- 把 $\psi(t)$ 代入第三式解出 $\dot{\phi}$, 然后对时间积分, 得到

$$\phi(t) = \frac{\omega_3 + \Omega}{\cos \theta_0} t + \phi_0$$

- 上述欧拉角表达式中, 独立积分常数取为 $\{\theta_0, \psi_0, \phi_0, \omega_3\}$

- 可以利用

$$\omega_3 = \frac{J \cos \theta_0}{I_3}$$

保留 $\{\theta_0, \psi_0, \phi_0, J\}$ 这几个独立积分常数, 那么解的形式是

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{J}{I_1} t + \phi_0 \\ \theta &= \theta_0 \\ \psi &= -\frac{(I_3 - I_1)J \cos \theta_0}{I_1 I_3} t + \psi_0 \end{aligned}$$

分析理解：惯性系中的角速度分量和空间锥面

- 利用 $\phi(t), \psi(t), \theta(t)$ 计算惯性系的角速度,

$$\begin{cases} \omega_x = \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_y = \sin \phi \dot{\theta} - \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_z = \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_x = \frac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3} J \sin 2\theta_0 \cos \left(\frac{J}{I_1} t + \phi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \omega_y = \frac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3} J \sin 2\theta_0 \sin \left(\frac{J}{I_1} t + \phi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \omega_z = \frac{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3) \cos 2\theta_0}{2I_1 I_3} J \end{cases}$$

- 角速度在惯性系与z-轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega_z} = \frac{(I_3 - I_1) \sin 2\theta_0}{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3) \cos 2\theta_0}$$

这是常数, 即角速度与角动量 (即z-轴) 的夹角不变

- 由左侧的角速度表达式知, ★角速度 $\vec{\omega}$ (瞬轴) 以进动角速度 J/I_1 绕z-轴逆时针旋转。

- 瞬轴在空间扫过一个锥面, 称为空间锥面

主轴系的角速度分量和本体锥面

- 前面解出，在主轴系的角速度分量是

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{J \sin \theta_0}{I_1} \cos \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) \\ \omega_2 = \frac{J \sin \theta_0}{I_1} \sin \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) \\ \omega_3 = \frac{J \cos \theta_0}{I_3} \end{cases}$$

- 角速度与 z' -轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta_0$$

是常数

- 由左侧的表达式知，★角速度 $\vec{\omega}$ （瞬轴）绕3-轴以进动角速度 Ω 旋转，夹角不变

- 瞬轴在主轴系（即扩大刚体上）扫过的轨迹称为本体锥面

本体锥面与空间锥面

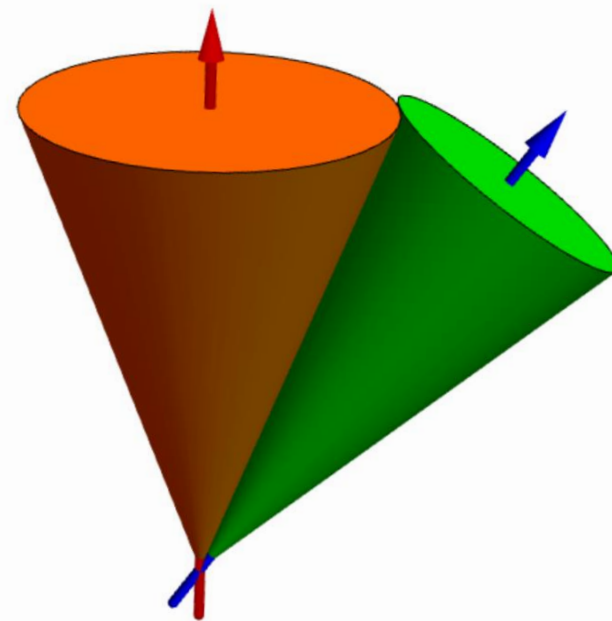
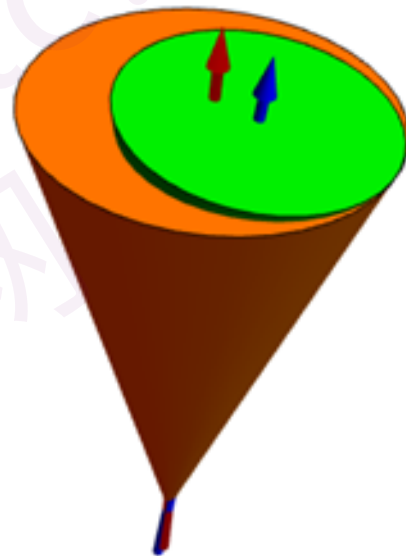
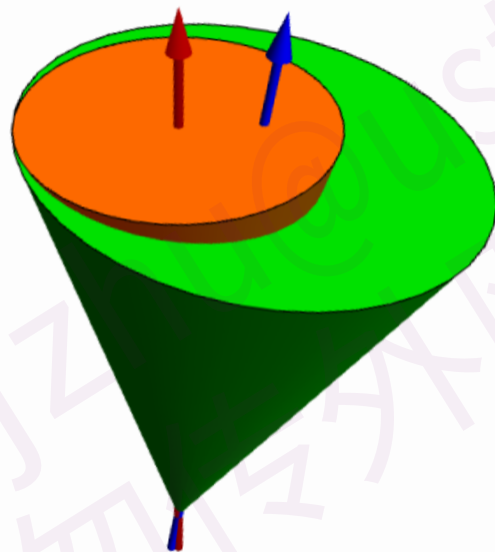
- 定点转动的瞬轴上各点速度为零
- 所以本体锥面（绿色）在空间锥面（橙色）上作无滑滚动。

推论：瞬轴、角动量和第3轴三线共面，

$$\vec{\omega} \cdot (\vec{J} \times \vec{e}_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_1 & I_1 \omega_1 & 0 \\ \omega_2 & I_1 \omega_2 & 0 \\ \omega_3 & I_3 \omega_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$



红色箭头是角动量方向，蓝色箭头是第3主轴，两个锥面的切线是瞬轴

拉格朗日陀螺

第二种可解的刚体模型

拉格朗日陀螺的拉氏函数

- **对称重陀螺** 又称拉格朗日陀螺

定点转动(参考点O, 陀螺足)

对称 (主轴惯量 $I_1 = I_2$)

质心C在第三轴上 (到参考点距离为 l)

受到重力的作用

- 拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - V \\ &= \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \\ &\quad + \frac{I_3}{2} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta \end{aligned}$$



守恒量和等效拉氏函数

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta$$

- 首次积分

- ① 拉氏量不含 ψ , p_ψ 守恒,

$$p_\psi = I_3(\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3 = J_3$$

- ② 拉氏量不含 ϕ , p_ϕ 守恒,

$$\begin{aligned} p_\phi &= I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3(\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \cos \theta \\ &= I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta = J_z \end{aligned}$$

- ③ 拉氏量不含时, 机械能守恒,

$$\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{J_z^2}{2I_3} + mgl \cos \theta = E$$

- 用角动量定理判断:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= l \vec{e}_3 \times (-mg) \vec{e}_z \\ \Rightarrow \vec{M} \cdot \vec{e}_z &= 0, \vec{M} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \Rightarrow \dot{J}_z &= 0, \dot{J}_3 = 0 \end{aligned}$$

- 由前两个守恒量可解出

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} = \frac{J_3}{I_3} - \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \end{cases}$$

- 作劳斯变换消去循环坐标, 得等效拉氏函数

$$L_{\text{eff}}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}(\theta)$$

$$V_{\text{eff}}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta + \frac{J_3^2}{2I_3}$$

在 $\theta = 0, \pi$ 处, 势能为正无穷。

求解

- 系统不含时，广义能量守恒，

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E$$

- 变量代换

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta$$

广义能量守恒成为

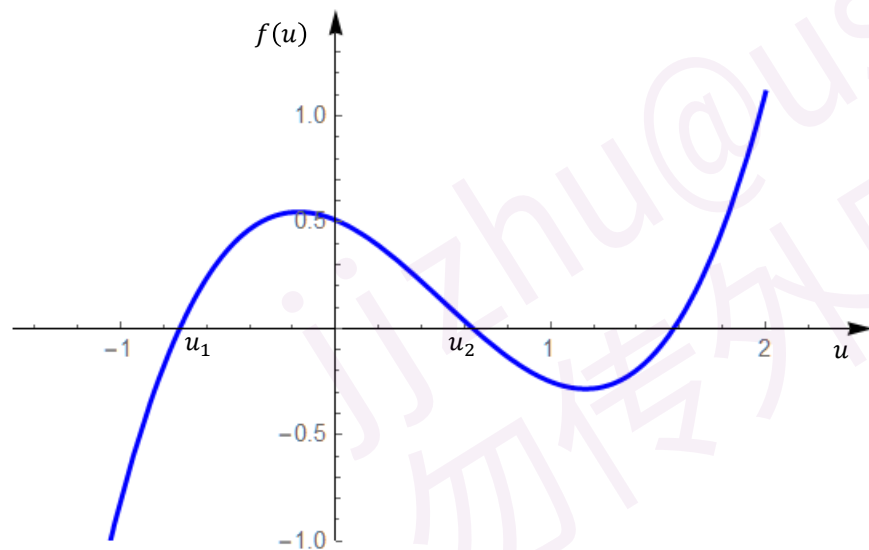
$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_3} - \frac{2mgl}{I_1}u \right) (1 - u^2) - \frac{(J_z - J_3u)^2}{I_1^2}$$

- 利用此方程解出 $\dot{u}$,
 - 积分可求得 $\theta(t)$;
 - 代回可得 $\dot{\phi}, \dot{\psi}$ 表达式;
 - 再积分可得所有欧拉角。
-
- 解析结果为椭圆积分，略

定性分析：章动角的变化范围

- 在章动角取得极值处,

$$\dot{u} = 0 \Rightarrow \dot{u}^2 = f(u) = 0$$
$$f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1} u \right) (1 - u^2) - \frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2}$$



- 三次多项式 $f(u)$, 有三个根

- ①② $u \rightarrow +\infty$ 时, $f(u) \rightarrow +\infty$, ② $f(1) < 0$,
①② $\Rightarrow f(u)$ 必有一根大于1

但是 $u = \cos \theta \in [-1, 1]$, 应该舍弃此根。

- 考虑不是稳定进动的情形 (即有的时刻 $\dot{\theta} \neq 0$, 或者说 $\dot{u} \neq 0$, $f(u) > 0$), 记这时的角度是 θ_0 , 那么

$$\exists u_0 = \cos \theta_0 \in (-1, 1), \quad f(u_0) > 0$$

- 又由于最大角度 $\theta = \pi$ 处必有

$$f(-1) = -\frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2} < 0$$

$f(u)$ 在区间 $[-1, 1]$ 两个端点都小于零, 中间 $u_0 \in (-1, 1)$ 处大于零, 所以方程 $f(u) = 0$ 在 $(-1, 1)$ 区间有且只有两根 (不是重根), 分别是章动角的最大值和最小值。

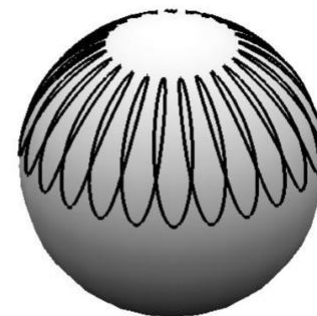
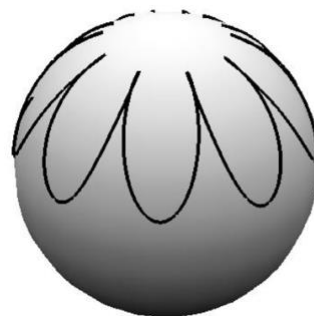
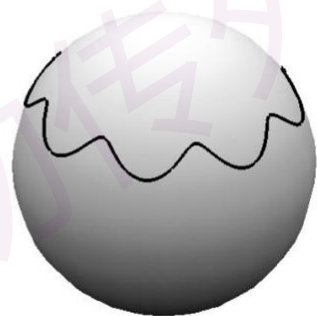
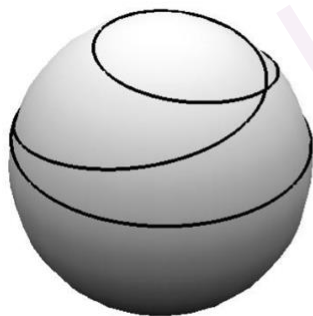
定性分析：第3主轴的轨迹

- 按欧拉角的定义，第3主轴的纬度 θ 、经度为 ϕ

- 第三主轴绕着z-轴进动，进动角速度 $\dot{\phi}$ 是

$$\dot{\phi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \stackrel{\text{def}}{=} a(\theta)$$

1. 如果 $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2], \dot{\phi} = a(\theta) \neq 0$ ，第3轴向同一方向不折回地进动（前两张图）；
2. 如果 $a(\theta_1) = 0$ 或者 $a(\theta_2) = 0$ ，第3轴轨迹是带尖点的曲线（第三张图，例如把倾斜且自转的陀螺放开，在 θ 最大值处 $\dot{\phi} = 0$ ，主轴3的轨迹就是如此）；
3. $\exists \theta \in (\theta_1, \theta_2), a(\theta) = 0$ ，在 θ 前后 $\dot{\phi}$ 变号，轨迹为带圈的曲线（第四张图）。



回转仪的特性 (略)

- 对称陀螺又称**回转仪**
- 其转动动能远大于重力势能

- 快速抛出的快陀螺：捏住陀螺的对称轴，使陀螺高速自转，然后释放陀螺。

$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) \neq 0$$

这是前面第三轴轨迹为带尖点曲线的情形

- 推论1

$$\theta(0) = \theta_1$$

是章动角的最小值。

证明 参考讲稿

$$\left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1} u_2 \right) (1 - u_2^2) - \frac{(J_z - J_3 u_2)^2}{I_1^2} = 0$$
$$\Rightarrow u_2 \approx u_1 - \frac{1}{p} (1 - u_1^2) - \frac{2}{p^2} u_1 (1 - u_1^2) + \mathcal{O}(p^{-3})$$

回转仪的特性 (略)

● 推论2 初始时转速越快, 章动范围越小。

证明: 由于快陀螺的章动角变化范围很小, 记

$$w = u_1 - u$$

广义能量守恒即方程

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1} u \right) (1 - u^2) - \frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2}$$

$$\dot{w}^2 = \frac{2mgl}{I_1} (1 - u_1^2) w - \frac{J_3^2}{I_1^2} w^2 + \mathcal{O}(p^{-2})$$

$$\ddot{w} = \frac{mgl}{I_1} (1 - u_1^2) - \frac{J_3^2}{I_1^2} w$$

$$w(t) = \frac{mgl I_1}{J_3^2} (1 - u_1^2) \left\{ 1 - \cos \left(\frac{J_3}{I_1} t \right) \right\}$$

● 推论3 章动角 $\theta(t)$ 随时间按三角函数震荡。

证明: 左侧最后一式即

$$u(t) = u_1 - \frac{mgl I_1}{J_3^2} (1 - u_1^2) \left\{ 1 - \cos \left(\frac{J_3}{I_1} t \right) \right\}$$

● 推论4 初速越快, 进动越慢。

证明 进动角速度为

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \xrightarrow{J_z = J_3 \cos \theta_1} \dot{\phi} = \frac{J_3 \cos \theta_1 - \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{J_3}{I_1} \frac{w}{1 - (u_1 - w)^2} \end{aligned}$$

取平均,

$$\begin{aligned} \langle \dot{\phi} \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi} dt \approx \frac{J_3}{I_1 (1 - u_1^2)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w dt \\ &= \frac{J_3}{I_1} \frac{mgl I_1}{J_3^2} = \frac{mgl}{I_3 \omega_3} \end{aligned}$$

拉莫尔进动

- 原子核外电子在高速旋转，在外磁场中有势能

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta$$

- 在上一章中，我们曾用泊松代数求解过进动角速度

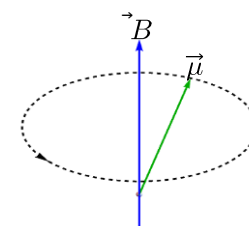
- 类比：

与对称重陀螺势能

$$V = -mgl \cos \theta$$

形式相同，**相当于快陀螺**，因此磁矩的进动角速度是

$$\frac{mgl}{J_3} \rightarrow \frac{\mu B}{J_3} = \frac{ef \cdot \pi a^2 B}{a \cdot m \omega a} = \frac{eB}{2m}$$



- 法兰西科学院1888年有奖征解

- 对称陀螺

$$I_1 = I_2 = 2I_3$$

- 有重力

- 质心在赤道面内

- 实用场景受限，略



俄国女数学家

索菲娅·瓦西列夫娜·柯瓦列夫斯卡娅

Софья Васильевна Ковалевская

Sofya Vasilyevna Kovalevskaya

1850.1.15 – 1891.2.10

KOWALEWSKAJA陀螺

第三种可解的刚体模型

非惯性参考系*

自习

关于这章的作业

- 与助教协商是否要提交
- 请务必把陀螺的习题做一遍
- 如果不做练习，熟练程度达不到考试要求

中心力场中的碰撞

- 讲稿、ppt已上传，课时不足，作为阅读材料
- 卢瑟福提出的截面概念，打开人类了解微观世界的大门
化学、原子物理、核物理、基本粒子物理
- 后续课程会重复学习截面概念
原子物理、量子力学、高等量子力学、粒子物理、量子场论等
课程中会从头讲起