

刚体动力学

刚体的动力学方程（运动方程）即质点组的角动量定理

用分析力学严格地推导刚体动力学方程

刚体的动能与转动惯量

- 刚体动能为

$$\begin{aligned} T &= \sum_P \frac{1}{2} m_P \dot{\vec{r}}_P^2 \\ &= \sum_P \frac{1}{2} m_P [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t)]^2 \end{aligned}$$

- 聚焦于定点转动，动能是

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{0} \\ T &= \sum_P \frac{1}{2} m_P [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_P m_P [\vec{r}_{CP}^2 \vec{\omega}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{CP})^2] \end{aligned}$$

这是角速度分量的二次型

- 二次型的系数，称为刚体的转动惯量张量：

$$\vec{I} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_P m_P (\vec{r}_{CP}^2 \mathbf{1} - \vec{r}_{CP} \vec{r}_{CP}^T)$$

$$I_{jk} = \sum_P m_P (\vec{r}_{CP}^2 \delta_{jk} - r_{CP,j} r_{CP,k})$$

转动惯量与质点速度无关，只与质量分布有关

- 类似地，对于质量连续分布的刚体，其转动惯量是

$$I_{jk} = \iiint \rho(x, y, z) (r^2 \delta_{jk} - r_j r_k) dx dy dz$$

- 用转动惯量表示的转动动能：

$$T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$$

转动惯量的性质

- 转动惯量张量

$$\vec{I} = \sum_P m_P (\vec{r}_{CP}^2 \mathbf{1} - \vec{r}_{CP} \vec{r}_{CP}^T)$$

① 对称

② 正定

证明：是转动动能这个二次型的系数，所以是半正定矩阵；仅当静止时动能为零，所以系数矩阵是正定矩阵。

例外：质量分布在一条直线的退化情形，半正定。

- 平行轴定理

$$\vec{I} = \vec{I}_C + M(\vec{r}_C^2 \mathbf{1} - \vec{r}_C \vec{r}_C^T)$$

上式中 $\vec{I}_C$ 表示以质心为基点的转动惯量， $\vec{r}_C$ 表示质心的位移。

请自行证明。

- 如果在惯性系中计算惯量，由于刚体在运动，因而质量的空间分布 $\rho(x, y, z)$ 随时间变化， I_{jk} 随之而变；
- 如果在随体系中计算惯量， I'_{jk} 是常数，与时间无关。
- 在随体系计算，运动方程更简洁

角动量

- 刚体相对于参考点C的角动量是

$$\vec{J} = \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P \dot{\vec{r}}_{CP} = \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CP})$$

把上式写成分量形式，化简：

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_P \epsilon_{ijk} r_{CP,j} m_P \epsilon_{kab} \omega_a r_{CP,b} \\ &= \sum_P r_{CP,j} m_P \omega_a r_{CP,b} (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) \\ &= \sum_P m_P \omega_a (\delta_{ia} \vec{r}_{CP}^2 - r_{CP,i} r_{CP,a}) \\ &= I_{ia} \omega_a \end{aligned}$$

即

$$\vec{J} = I \vec{\omega}$$

- 根据上式，角动量的方向，一般不与角速度平行

主轴坐标系

- 西尔维斯特惯性定理 (Sylvester's law of inertia)

正定的实对称矩阵，可以通过正交变换对角化。

- 设

$$I\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

特征值 $\lambda = I_1, I_2, I_3$ 称为主转动惯量

特征矢 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 称为主轴

- 三个主轴 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 相互正交

- 可以选用主轴作随体坐标系的坐标轴，称这个随体系为主轴坐标系

- 在主轴系中，转动惯量分量不仅是常数，并且是对角矩阵

$$I = \text{diag}\{I_1, I_2, I_3\}$$

- 在主轴系，动能、角动量的表达式比较简单：

$$T = \frac{1}{2} \sum_j I_j \omega_j^2$$

$$J_i = I_i \omega_i (\text{指标 } i \text{ 不求和})$$

惯量椭球

- 定轴转动的动能可以写成

$$T = \frac{1}{2} I_n \omega^2$$

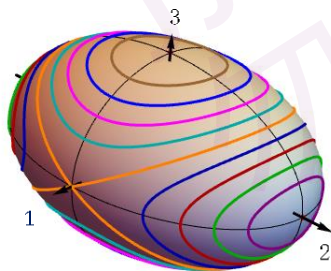
I_n 表示刚体沿转动轴 $\vec{n}$ 转动时的转动惯量

- 定点转动的动能:

$$T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k = \frac{1}{2} I_{jk} n_j n_k \omega^2$$

- 每一个瞬间，刚体都在绕瞬轴转动，对比两个式子，得

$$I_n = I_{jk} n_j n_k$$



- 假想一些点，定义点的坐标是

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_n}}, \quad \vec{n} \in S^2$$

这些点必然满足

$$\frac{1}{2} I_n \omega^2 = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k \Rightarrow \frac{1}{I_n \omega^2} I_{jk} \omega_j \omega_k = 1$$

等价于坐标 $\vec{r}$ 满足

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{13}xz + 2I_{23}yz = 1$$

上式说明，这些点在一个椭球面上。

称此椭球面为惯量椭球。

- 在主轴系中，惯量椭球的方程是

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1$$

- 当刚体转动时，惯量椭球随之运动；
- 不管几何形状和质量分布多么复杂的刚体，它的运动都可以看成是惯量椭球的运动

定点转动刚体的动力学方程

- 刚体的运动方程:

大部分教材直接引用角动量定理,用的是牛顿力学方法;

有些教材只推导z分量的拉氏方程,然后由对称性得到其它分量的运动方程。

- 用分析力学的方法(最小作用量原理和变分法),不用技巧回避推导,可以直接推导出完整的刚体动力学方程

- 定点转动的作用量

$$S[\vec{\psi}] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k - V(t, \vec{\psi}) \right\} dt$$

- 引理: 转动矩阵的变分是

$$(R + \delta R) \equiv e^{\delta \vec{\varphi} \cdot \vec{X}} R$$

$$\Rightarrow (R + \delta R) R^T = \mathbf{1} + \vec{X} \cdot \delta \vec{\varphi}$$

$$\Rightarrow \delta R = (\vec{X} \cdot \delta \vec{\varphi}) R$$

- 转动动能的变分

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k \right) &= \delta \left(\frac{1}{2} I'_{jk} \omega'_j \omega'_k \right) = I'_{jk} \omega'_j \delta \omega'_k = J'_k \delta \omega'_k \\ &= J_k \delta \omega_k = J_k \delta \frac{d\varphi_k}{dt} = J_k \frac{d}{dt} \delta \varphi_k \\ &\Rightarrow \delta \left(\frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k \right) = \vec{J} \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{\varphi} \end{aligned}$$

- 计算作用量的变分,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \vec{J} \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{\varphi} - \delta V(t, \vec{r}_{CP}(\vec{\psi})) \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \vec{J} \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{\varphi} - \sum_P \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{CP}} \cdot \delta \vec{r}_{CP}(t) \right\} dt \end{aligned}$$

变分

- 利用引理化简,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CP}(t) &= R(t)\vec{r}_{CP}(0) \\ \delta\vec{r}_{CP}(t) &= \delta R(t)\vec{r}_{CP}(0) = (\vec{X} \cdot \delta\vec{\varphi})R(t)\vec{r}_{CP}(0) \\ &= (\vec{X} \cdot \delta\vec{\varphi})\vec{r}_{CP}(t) = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_{CP}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \vec{J} \cdot \frac{d}{dt} \delta\vec{\varphi} - \sum_P \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{CP}} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_{CP}) \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \vec{J} \cdot \frac{d}{dt} \delta\vec{\varphi} + \sum_P \vec{F}_P \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_{CP}) \right\} dt \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \vec{J} \cdot \frac{d}{dt} \delta\vec{\varphi} + \delta\vec{\varphi} \cdot \sum_P (\vec{r}_{CP} \times \vec{F}_P) \right\} dt\end{aligned}$$

- 记刚体受到的总力矩为

$$\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_P (\vec{r}_{CP} \times \vec{F}_P)$$

并对第一项分部积分, 最终得

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{-\dot{\vec{J}} + \vec{M}\} \cdot \delta\vec{\varphi} dt$$

刚体的运动方程

- 根据哈密顿原理,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{-\dot{\vec{J}} + \vec{M}\} \cdot \delta \vec{\varphi} dt = 0$$

- 可以证明, $\delta \vec{\varphi}$ 是独立的变分:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} &= \frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}} \\ \Rightarrow \delta \vec{\varphi} &= \frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \delta \vec{\psi} \end{aligned}$$

这一线性变换非奇异,

$$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i \Rightarrow f(A)\vec{x}_i = f(\lambda_i)\vec{x}_i \Rightarrow \det f(A) = \prod_i f(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow \det \left(\frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \right) = \dots \neq 0$$

- $\{\delta \psi_i | i = 1, 2, 3\}$ 线性无关, 在非奇异线性变换下, $\{\delta \varphi_i | i = 1, 2, 3\}$ 也是线性无关的
- 于是, 刚体定点转动的运动方程, 即角动量定理:

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}}$$

欧拉动力学方程

- 惯性系中的运动方程是角动量定理,

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

- 在随体系中, 转动惯量是常数, 会更方便求解
- 为此, 在运动方程两边同乘以 R^{-1} ,

$$\vec{M}' \stackrel{\text{def}}{=} R^{-1}\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{J}' \stackrel{\text{def}}{=} R^{-1}\vec{J} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{L. H. S.} &= R^{-1} \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} (R^{-1}\vec{J}) - \dot{R}^T \vec{J} \\ &= \frac{d\vec{J}'}{dt} - (\dot{R}^T R)(R^{-1}\vec{J}) = \frac{d\vec{J}'}{dt} + (R^T \dot{R})\vec{J}' \\ &= \frac{d\vec{J}'}{dt} + (\vec{\omega}' \cdot \vec{X})\vec{J}' = \frac{d\vec{J}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{J}' \end{aligned}$$

- 因此, 随体系的运动方程 (by Lagrange) 是

$$\frac{d\vec{J}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{J}' = \vec{M}'$$

$$\dot{J}_a + \varepsilon_{abc} \omega_b J_c = M_a$$

为使符号简洁, 后面省去随体系物理量上的符号 “'”

- 在主轴系的运动方程, 称为欧拉刚体动力学方程

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

- 注意到在无外力时,

Euler动力学方程只涉及角速度, 不涉及欧拉角,

——可以①先解出角速度, ②然后代入运动学方程解出刚体的姿态。

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

相对微商

- 角动量定理的形式是

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

- 刚才我们对方程两边乘以 R^{-1} ，得到了随体系的角动量分量所满足的微分方程

$$\Rightarrow \frac{d\vec{J}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{J}' = \vec{M}'$$

- 这个式子可以推广：对任何一个矢量物理量 $\vec{A}$ ，如果在惯性系有

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{B}$$

- 那么在随体系的分量满足

$$\frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{A}' = \vec{B}'$$

- 定义“**相对微商**”：

$$\frac{\tilde{d}\vec{A}'}{\tilde{d}t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{A}'$$