



刚体运动的描述



刚体运动的广义坐标



刚体运动的角速度



定点转动的动力学方程



欧拉陀螺



拉格朗日陀螺



非惯性参考系中的运动*

刚体力学

① 运动学

② 动力学

③ 应用

刚体运动学

ijzhu@ustc.edu.cn
勿传外网

刚体模型

- 不会发生形变的质点组，定义为刚体

即在运动过程中，物体上的任意两点距离保持不变

- 自由度

1个质点，则有3个直角坐标分量，自由度为3

2个质点构成的刚体，需要用 $3+3=6$ 个坐标分量来描述；

由于这两点的距离在运动中保持不变，即有1个约束条件

自由度为 $6-1=5$

3个质点，这时需要 $5+3=8$ 个坐标

第三个点到其余两点的距离保持不变，有2个约束条件

自由度为 $8-2=6$

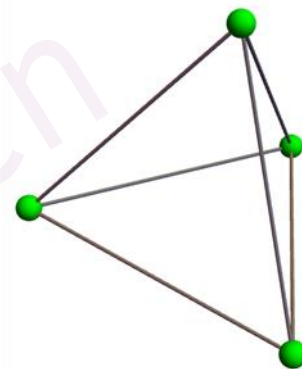
4个质点，需要 $6+3=9$ 个坐标

第四个点到其余三点距离保持不变，有3个约束

自由度为 $9-3=6$

.....

共需要6个广义坐标描述刚体的位形

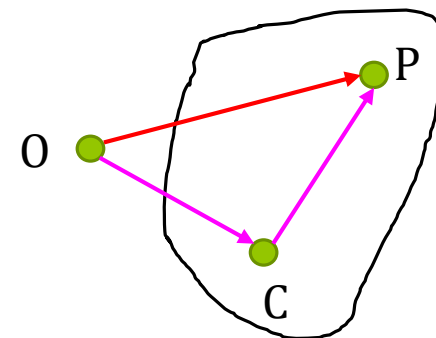


随体坐标系和惯性系

- 讨论刚体运动的问题，需要用到两种参考系
- 随体坐标系**：固定在刚体上，跟随刚体一起运动的坐标系
- 在刚体上取定一个**基点C**（也称为**参考点**），作为随体坐标系的原点
- 在刚体上的任意一点P，跟随刚体运动时的位移 $\mathbf{r}_P$ ，可以表示为

$$\mathbf{r}_P(t) = \mathbf{r}_C(t) + \mathbf{r}_{CP}(t)$$

- 按照刚体模型，CP两点之间的距离不变， $|\mathbf{r}_{CP}(t)| = \text{常数}$



- 惯性系的标准基**：正交归一、完备、右手

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$
$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}, \quad \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = 1, \quad (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

- 随体系的标准基**

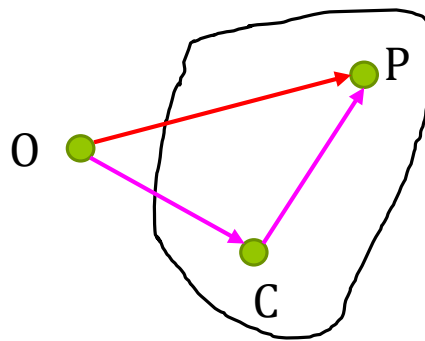
$$\mathbf{e}'_j(t), \quad j = 1, 2, 3.$$
$$\mathbf{e}'_j(t) \cdot \mathbf{e}'_k(t) = \delta_{jk}, \quad \mathbf{e}'_j(t) \cdot \mathbf{e}'_j(t) = 1, \quad (\mathbf{e}'_1(t) \times \mathbf{e}'_2(t)) \cdot \mathbf{e}'_3(t) = 1$$

刚体上任意定点的坐标

- 任意定点P，在惯性系的坐标为

$$r_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_P(t) \cdot \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, 3$$

随着刚体的运动而变化。



- 任意定点P，在随体系的坐标为

$$\mathbf{r}_P(t) = \mathbf{r}_C(t) + \mathbf{r}_{CP}(t)$$

$$r'_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{CP}(t) \cdot \mathbf{e}'_j(t) \equiv \mathbf{r}_{CP}(0) \cdot \mathbf{e}'_j(0), \quad j = 1, 2, 3$$

随体坐标不随刚体的运动而变化。（线性代数：保模长的变换，必然保持内积不变）

刚体的一般运动

- 从随体系到惯性系的坐标变换矩阵

$$R_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_k(t), \quad j, k = 1, 2, 3.$$

又称为DCM (Direction Cosine Matrix 方向余弦矩阵)、转动矩阵

- 固定在刚体上点P, 位移是

$$\mathbf{r}_P(t) = \mathbf{r}_C(t) + \mathbf{r}_{CP}(t)$$

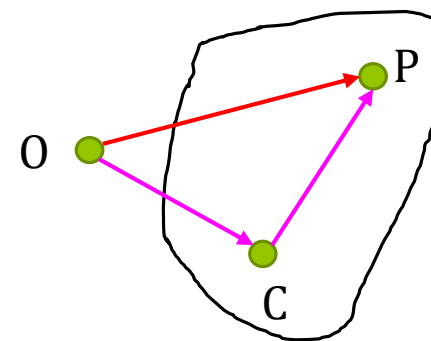
- 两边同时点乘 $\mathbf{e}_j$,

$$\begin{aligned} r_{Pj}(t) &= r_{Cj}(t) + \mathbf{r}_{CP}(t) \cdot \mathbf{e}_j = r_{Cj}(t) + \mathbf{r}_{CP}(t) \cdot \mathbf{e}'_k(t) \mathbf{e}'_k(t) \cdot \mathbf{e}_j \\ &= r_{Cj}(t) + \mathbf{r}_{CP}(0) \cdot \mathbf{e}'_k(0) \mathbf{e}'_k(t) \cdot \mathbf{e}_j = r_{Cj}(t) + \mathbf{r}_{CP,k}(0) R_{jk}(t) \end{aligned}$$

- 写成矩阵的形式, 惯性系的坐标满足沙勒 (Chasles) 定理:

$$\vec{r}_P(t) = R(t) \vec{r}_{CP}(0) + \vec{r}_C(t)$$

刚体最一般位移可以分解为绕基点的转动和跟随基点的平移



转动与基点无关

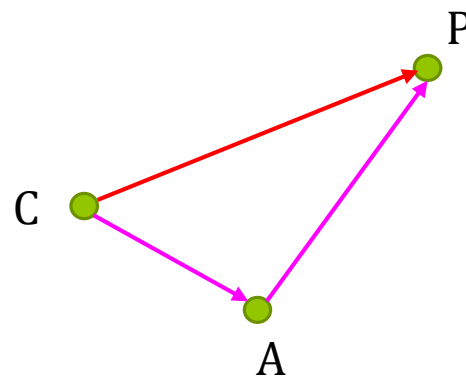
- 推论

改变基点，转动矩阵不变。

- 证明：转动矩阵的定义是

$$R_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_k(t)$$

把基点从C改为A，而不改变坐标轴的取向，不会改变转动矩阵的矩阵元。



转动矩阵

- 转动矩阵的9个矩阵元，可以作为广义坐标
- 满足约束条件

$$RR^T = \mathbf{1}$$
$$\det R = 1$$

- 9个矩阵元，满足6个独立约束，剩下3个自由度
- 再加上随基点的平移 $\vec{r}_C(t)$ 这3个广义坐标，刚好是刚体运动的6个自由度
- 运动方程是Sylvester方程（略），较难求解

欧拉转动定理

- 以转动矩阵的9个矩阵元作为广义坐标，使用不方便
- 希望能得到三个独立的参数，作为广义坐标
- 为此需要进一步分析转动矩阵
- 与坐标架的选择无关的性质，是转动矩阵的特征值

- 三个特征值 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$
$$\left. \begin{aligned} R\vec{a} = \lambda\vec{a} &\Rightarrow \vec{a}^\dagger R^T R \vec{a} = |\lambda|^2 \vec{a}^\dagger \vec{a} \\ R^T R &= \mathbf{1} \\ \det(R - \lambda \mathbf{1}) &= 0 \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 = \lambda_3^* \\ \det R &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\lambda|^2 = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = e^{i\psi} \\ \lambda_3 = e^{-i\psi} \end{cases}$$

- $\lambda_1 = 1$ 对应的特征矢，可取为实单位矢量：

$$R(\vec{a} + i\vec{b}) = (\vec{a} + i\vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} R\vec{a} = \vec{a} \\ R\vec{b} = \vec{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{n} = c\vec{a}$$

$$R\vec{n} = \vec{n}, \quad \vec{n}^* = \vec{n}, \quad \vec{n}^2 = 1$$

因此， $\vec{n}$ 是转动轴。

这一结论表述为：

- 欧拉转动定理**

刚体的任意定点转动，都有一个（定点之外的）不动点；

或者叙述为，刚体的定点运动等价于绕某转动轴的转动。

无穷小转动和有限转动

- 若矢量 $\vec{r}$ 绕 $\vec{n}$ 方向转动轴转无穷小角度 ϵ ，则

$$\vec{r}' = \vec{r} + \epsilon \vec{n} \times \vec{r}$$

$$r'_i = r_i + \epsilon \epsilon_{ijk} n_j r_k$$

- 定义一组矩阵基，以便把上面的线性变换写成矩阵形式，

$$r'_i = (\delta_{ik} + \epsilon \epsilon_{ijk} n_j) r_k$$

$$(X_j)_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon_{jkl}$$

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = (\mathbf{1}_{3 \times 3} + \epsilon n_j X_j) \vec{r} = e^{\epsilon n_j X_j} \vec{r}$$

- 绕着 $\vec{n}$ 轴连续转动，

$$\vec{r}' = e^{\epsilon n_j X_j} \dots e^{\epsilon n_j X_j} \vec{r} = e^{\epsilon n_j X_j + \dots + \epsilon n_j X_j} \vec{r} = e^{\psi n_j X_j} \vec{r} = e^{\psi \vec{n} \cdot \vec{X}} \vec{r}$$

- 有限转动矩阵可以参数化为

$$R(\vec{\psi}) = e^{\psi_j X_j} = e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} = e^{\psi \vec{n} \cdot \vec{X}}$$

- 参数 $\vec{\psi} = \psi \vec{n} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ 称为Rodrigues参数、角位移或角-轴参数 (Angle-Axis parameters)。
- 角位移正是我们需要的三个独立广义坐标

转动矩阵的显式1

- 记

$$A = \ln R = \vec{\psi} \cdot \vec{X} = \psi_1 X_1 + \psi_2 X_2 + \psi_3 X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

特征值是 $\ln \lambda$:

$$0, i\psi, -i\psi$$

- 由凯莱-哈密顿定理,

$$A^3 + \psi^2 A = 0$$

- 求出矩阵的指数函数是

$$R = e^A = \mathbf{1} + \frac{\sin \psi}{\psi} A + \frac{1}{\psi^2} (1 - \cos \psi) A^2$$

- 记

$$X_{\vec{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{X} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{\vec{n}}^2 = -\mathbf{1} + \vec{n}\vec{n}^T$$

- 那么

$$\begin{aligned} R(\vec{\psi}) &= e^{\psi X_{\vec{n}}} = \mathbf{1} + X_{\vec{n}}^2 (1 - \cos \psi) + X_{\vec{n}} \sin \psi \\ &= \mathbf{1} \cos \psi + \vec{n}\vec{n}^T (1 - \cos \psi) + X_{\vec{n}} \sin \psi \end{aligned}$$

$$R(\vec{\psi}) = \begin{pmatrix} n_1^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & n_1 n_2(1 - \cos \psi) - n_3 \sin \psi & n_1 n_3(1 - \cos \psi) + n_2 \sin \psi \\ n_1 n_2(1 - \cos \psi) + n_3 \sin \psi & n_2^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & n_2 n_3(1 - \cos \psi) - n_1 \sin \psi \\ n_1 n_3(1 - \cos \psi) - n_2 \sin \psi & n_2 n_3(1 - \cos \psi) + n_1 \sin \psi & n_3^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

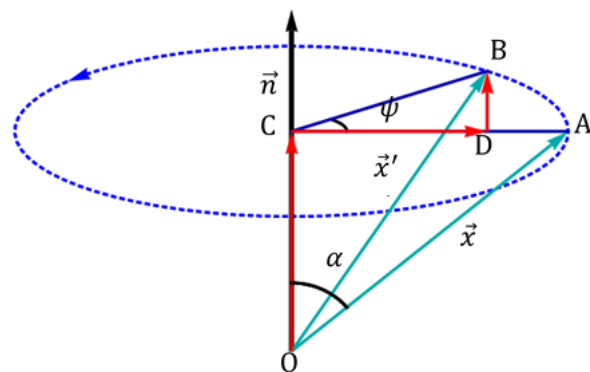
$$R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 与前面章节推导的转动公式相符

$$(X_{\vec{n}} \vec{x})_i = n_j (X_j)_{ik} x_k = -\varepsilon_{jik} n_j x_k = \varepsilon_{ijk} n_j x_k = (\vec{n} \times \vec{x})_i$$

$$\begin{aligned} R(\vec{\psi}) \vec{x} &= \{ \mathbf{1} + X_{\vec{n}}^2 (1 - \cos \psi) + X_{\vec{n}} \sin \psi \} \vec{x} \\ &= \vec{x} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}) (1 - \cos \psi) + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \psi \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} + \{ \vec{x} - (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} \} \cos \psi + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \psi \end{aligned}$$



有限角位移不能线性相加

- Rodrigues 参数虽被称为角位移，但并不满足平行四边形法则
- 由 BCH 公式

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A-B,[A,B]]+\dots}$$
$$\Rightarrow e^{\vec{\psi}_1 \cdot \vec{X}} e^{\vec{\psi}_2 \cdot \vec{X}} \neq e^{(\vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2) \cdot \vec{X}}$$

与位移不同

- 无穷小的转动是可加的，

$$\begin{aligned} e^{\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{X}} e^{\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{X}} &= (\mathbf{1} + \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{X})(\mathbf{1} + \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{X}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \mathbf{1} + \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{X} + \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{X} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= e^{(\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2) \cdot \vec{X}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

转动轴的转动

- 考虑坐标系变换 $Q \in SO(3)$, 矢量和矩阵分别变换为

$$\vec{a} \rightarrow Q\vec{a}, \quad M \rightarrow QMQ^{-1}$$

- 转动矩阵应该作相似变换,

$$R(\psi\vec{n}) \rightarrow QR(\psi\vec{n})Q^{-1} = \exp\{Q(\vec{\psi} \cdot \vec{X})Q^{-1}\}$$

- 而我们知道:

$$\left. \begin{aligned} Q_{jj'}Q_{kk'}Q_{ll'}\varepsilon_{j'k'l'} &\equiv \det Q \varepsilon_{jkl} \\ \det Q &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{jj'}Q_{kk'}Q_{ll'}\varepsilon_{j'k'l'} = \varepsilon_{jkl} \Rightarrow Q_{jj'}Q_{kk'}Q_{ll'}(X_{j'})_{k'l'} = (X_j)_{kl}$$

$$\xrightarrow{\text{乘以 } Q_{ji}} Q_{kk'}Q_{ll'}(X_i)_{k'l'} = Q_{ji}(X_j)_{kl} \Rightarrow QX_iQ^T = Q_{ji}X_j$$

$$\Rightarrow Q(\vec{\psi} \cdot \vec{X})Q^{-1} = (Q\vec{\psi}) \cdot \vec{X}$$

- 所以有

$$QR(\vec{\psi})Q^{-1} = R(Q\vec{\psi}), \quad QR_{\vec{n}}(\psi)Q^{-1} = R_{Q\vec{n}}(\psi)$$

- 即转动轴按矢量转动, 转动角不变

这从几何意义上很好理解。

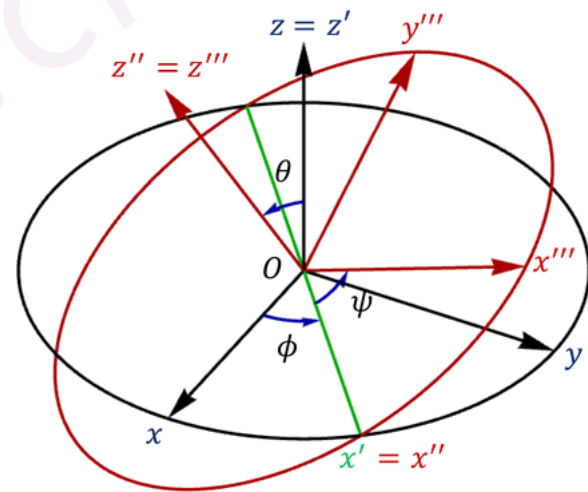
欧拉角

- 欧拉把刚体转动分解成三个转动矩阵之积：

- ① 随体坐标系绕 z 轴逆时针转 ϕ 角, $Oxyz \rightarrow Ox'y'z'$;
- ② 随体坐标系绕节线—— x' 轴逆时针旋转 θ 角, $Ox'y'z' \rightarrow Ox''y''z''$;
- ③ 随体坐标系绕 Oz'' 逆时针旋转 ψ 角。

- 即

$$R(\phi, \theta, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} R_{z''}(\psi)R_{x'}(\theta)R_z(\phi)$$



- 随体系的第3轴在转动之后的方向, 由纬度 θ 和经度 ϕ 确定。
- $\theta \in [0, \pi]$ 是第3轴与 z 轴的夹角, 称为章动角 (nutation angle)
- $\phi \in [0, 2\pi]$ 是第3轴绕 z 轴转过的角度, 称为进动角 (precession angle)
- $\psi \in [0, 2\pi]$ 是刚体绕第3轴旋转的角度, 称为自转角 (intrinsic rotation, spin angle)

欧拉转动矩阵

- 转换为惯性系的转动

$$\begin{aligned}
 & R_{z''}(\psi)R_{x'}(\theta)R_z(\phi) \\
 &= \{R_{x'}(\theta)R_{z'}(\psi)R_{x'}(\theta)^{-1}\}R_{x'}(\theta)R_z(\phi) = R_{x'}(\theta)R_{z'}(\psi)R_z(\phi) \\
 &= \{[R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\phi)^{-1}][R_z(\phi)R_z(\psi)R_z(\phi)^{-1}]\}R_z(\phi) \\
 &= R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)
 \end{aligned}$$

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)$$

- 将

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

代入，计算得

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & -\cos \theta \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 在群论和量子力学中欧拉角的定义，与分析力学中的定义稍有不同，

$$\begin{aligned}
 & R(\alpha, \beta, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Tait–Bryan angles

- Tait – Bryan angles 常用于工程和控制领域

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

roll 横滚角 ϕ (轴向: 前)

pitch 俯仰角 θ (轴向: 右)

yaw 航向角 ψ (轴向: 下)

- 欧拉角参数的缺点: 万向节死锁 GIMBAL LOCK

当 $\theta = 0$ 时,

$$R(\phi, 0, \psi) = R_z(\phi)R_x(0)R_z(\psi) = R_z(\phi + \psi)$$

参数 ϕ, ψ 有无穷多种取法, 可能导致大数相减, 丢失数值精度。

四元数Quaternions*

- 复数

$$z = a + ib$$

虚数 i 不仅表示虚部坐标轴的单位矢量，还表示逆时针旋转 90°

- 对三维欧氏空间 $E(3)$ ，Hamilton发现需要引进三个虚部单位

- 三维空间的点

$$xi_1 + yi_2 + zi_3$$

- i_1 表示绕 x -轴旋转 90° ，所以有

$$i_1 i_2 = i_3, \quad i_1 i_3 = -i_2$$

- 并且约定

$$i_1^2 = -1$$

- 乘法规则

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow i_j i_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl} i_l$$

- 四元数体 (skew field)

四元数由实部和虚部组成，又称为矢量部分和标量部分，

$$\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{i}$$

$$\text{Re } a = a_0, \quad \text{Im } a = \vec{a} \cdot \vec{i}$$

- 加法、乘法、分配律

- 乘法交换律不成立，但满足结合律

$$(ab)c = a(bc)$$

四元数的运算*

- 相乘

$$\begin{aligned}ab &= (a_0 + \vec{a} \cdot \vec{i})(b_0 + \vec{b} \cdot \vec{i}) \\&= (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}) + (a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{i}\end{aligned}$$

- 复共轭

$$a^* \stackrel{\text{def}}{=} a_0 - a_1 \mathbf{i}_1 - a_2 \mathbf{i}_2 - a_3 \mathbf{i}_3$$

$$\Rightarrow (ab)^* = b^* a^*$$

- 模长

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^* a} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |ab| &= \sqrt{(ab)^* (ab)} = \sqrt{b^* a^* ab} \\&= \sqrt{(a^* a) b^* b} = |a| |b|\end{aligned}$$

- 倒数 (逆)

$$a^{-1} a = a a^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^{-1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^*}{|a|^2} \\(ab)^{-1} &= b^{-1} a^{-1}\end{aligned}$$

四元数与转动*

- 三维空间的点表示成四元数

$$\tilde{r} \stackrel{\text{def}}{=} x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3$$

- 单位模长的四元数

$$qq^* = 1 \Rightarrow q^{-1} = q^*$$

- 对三维空间的点作相似变换

$$\tilde{r} \rightarrow \tilde{r}' = q\tilde{r}q^{-1}$$

- 变换后仍然是纯虚数

$$\begin{aligned} \text{Re } \tilde{r}' &= \text{Re } q\tilde{r}q^{-1} = \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} + \frac{1}{2}(q\tilde{r}q^{-1})^* \\ &= \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} - \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} = 0 \end{aligned}$$

- 所以这等价于三维空间的线性变换

$$\tilde{r}' = q\tilde{r}q^{-1} \Leftrightarrow \vec{r}' = R\vec{r}$$

- 该线性变换保模长

$$\begin{aligned} |\tilde{r}'| &= |q\tilde{r}q^{-1}| = |\tilde{r}| \\ R^T R &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

- 单位四元数的相似变换, 对应正交变换

$$q(\vec{r} \cdot \vec{i})q^{-1} = (R\vec{r}) \cdot \vec{i}$$

- 映射关系

$$R(q)$$

$$= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det R(q) = +1$$

$$R(-q) = R(q)$$

- 是 (二对一的) 同态映射

$$\begin{aligned} (pq)(\vec{r} \cdot \vec{i})(pq)^{-1} &= (R(pq)\vec{r}) \cdot \vec{i} \\ &= pq(\vec{r} \cdot \vec{i})q^{-1}p^{-1} = (R(p)R(q)\vec{r}) \cdot \vec{i} \\ &\Rightarrow R(pq) = R(p)R(q) \end{aligned}$$

- 单位四元数的指数化

$$\begin{aligned} q(\vec{\psi}) &= \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\psi} \cdot \vec{i}\right) = \cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}(\vec{n} \cdot \vec{i}) \\ q(\vec{\psi}) &\rightarrow R(\vec{\psi}) \end{aligned}$$

- 用四元数表示转动的优点

① 线性, 计算量小;

② 易规整: 可以在每次做完乘法之后, 把所得的四元数模长归一, 从而抑制计算中舍入误差的积累, 而DCM计算中必须使用SVD规整;

③ 计算时无死锁。

在物理、计算机动画和工程控制中得到广泛应用。

角速度

- 仅考虑定点转动,

$$\vec{r}_C(t) = \vec{0}$$

这时有

$$\begin{aligned}\vec{r}_P(t) &= R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{r}_C(t) \\ \Rightarrow \vec{r}_P(t) &= R(t)\vec{r}_{CP}(0)\end{aligned}$$

- 考虑刚体上任意一点P在dt时间内的位移,

$$t \rightarrow t + dt, \quad \vec{r}_P(t) \rightarrow \vec{r}_P(t + dt)$$

$$\vec{r}_P(t + dt) = \exp(\vec{X} \cdot d\vec{\varphi}) \vec{r}_P(t)$$

其中 $d\vec{\varphi}$ 是:

从t时刻起, 在dt时间内, 刚体的 (无穷小) 角位移。

- 合理的瞬时角速度定义为

$$\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

- 角速度的计算公式

$$\vec{r}_P(t + dt) = \exp(\vec{X} \cdot d\vec{\varphi}) \vec{r}_P(t)$$

$$\Leftrightarrow R(t + dt)\vec{r}_{CP}(0) = \exp(\vec{X} \cdot d\vec{\varphi}) R(t)\vec{r}_{CP}(0)$$

$$\Leftrightarrow R(t + dt) = \exp(\vec{X} \cdot d\vec{\varphi}) R(t)$$

$$R + \dot{R}dt = (\mathbf{1} + \vec{X} \cdot d\vec{\varphi})R$$

$$\boxed{\vec{X} \cdot \vec{\omega} = \dot{R}R^T}$$

- 注意: 角速度不是角位移的变化率,

$$\vec{\omega} \neq d\vec{\psi}/dt$$

- 由于转动矩阵与选用的参考点无关, 所以角速度与参考点无关

- 角速度线性可加

设在时间间隔dt发生了角位移 $d\vec{\varphi}_1$ 和 $d\vec{\varphi}_2$,

无穷小角位移可加,

$$\exp\{d\vec{\varphi}_1 \cdot \vec{X}\} \exp\{d\vec{\varphi}_2 \cdot \vec{X}\} = \exp\{(d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \cdot \vec{X}\}$$

所以角速度可加,

$$\frac{d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}_1}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}_2}{dt} \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

用角位移参数表示角速度 (1)

- 转动矩阵

$$R(t) = e^{\vec{\psi}(t) \cdot \vec{X}}$$

- 角速度

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot \vec{\omega}(t) &= \dot{R} R^T \\ \xrightarrow{\text{转置}} -\vec{X} \cdot \vec{\omega} &= R \dot{R}^T \end{aligned}$$

- 矩阵指数函数的求导公式:

$$\frac{d}{dt} e^A = e^A \left(\frac{\mathbf{1} - e^{-\text{ad}_A}}{\text{ad}_A} \right) \circ \dot{A}$$

其中矩阵A的伴随表示 (adjoint representation) ad_A 定义为

$$\text{ad}_A \circ B \stackrel{\text{def}}{=} [A, B] = AB - BA$$

- 计算得

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot \vec{\omega} &= -R \dot{R}^T = - \left(\frac{\mathbf{1} - e^{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}}}{\text{ad}_{-\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} \right) \circ (-\dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{X}) \\ &= \left(\frac{e^{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} - \mathbf{1}}{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} \right) \circ (\dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{X}) \end{aligned}$$

- 继续化简

由于

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\vec{a} \cdot \vec{X}} \circ (\vec{b} \cdot \vec{X}) &= [\vec{a} \cdot \vec{X}, \vec{b} \cdot \vec{X}] = a_j b_k \varepsilon_{jkl} X_l \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{X} = \{(\vec{a} \cdot \vec{X}) \vec{b}\} \cdot \vec{X} \\ (\text{ad}_{\vec{a} \cdot \vec{X}})^2 \circ (\vec{b} \cdot \vec{X}) &= \{(\vec{a} \cdot \vec{X})^2 \vec{b}\} \cdot \vec{X} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f(\text{ad}_{\vec{a} \cdot \vec{X}}) \circ (\vec{b} \cdot \vec{X}) = \{f(\vec{a} \cdot \vec{X}) \vec{b}\} \cdot \vec{X}$$

用角位移参数表示角速度 (2)

- 代入上式得

$$\begin{aligned}\vec{X} \cdot \vec{\omega} &= \left(\frac{e^{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} - \mathbf{1}}{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} \right) \dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{X} \\ &= \left(\frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}} \right) \cdot \vec{X}\end{aligned}$$

- 所以角速度在惯性系的分量是

$$\vec{\omega} = \frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}}$$

注意从这个式子可以看出，确实有
 $\vec{\omega} \neq \dot{\vec{\psi}}$

- 角速度在随体系的分量是

$$\vec{\omega}' = R^{-1} \vec{\omega} = \frac{\mathbf{1} - e^{-\vec{\psi} \cdot \vec{X}}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}}$$

利用Cayley-Hamilton定理，化简上式中的矩阵函数，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} &= \dot{\vec{\psi}} - \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} (\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}}) \\ &\quad + \frac{\psi - \sin \psi}{\psi^3} \{ \vec{\psi} \times (\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}}) \}\end{aligned}$$

- Bortz 方程*

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\psi}} &= \frac{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}{\mathbf{1} - e^{-\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} \vec{\omega}' \\ &= \vec{\omega}' + \frac{1}{2} \vec{\psi} \times \vec{\omega}' + \frac{2 \sin \psi - \psi(1 + \cos \psi)}{2\psi^2 \sin \psi} \vec{\psi} \times (\vec{\psi} \times \vec{\omega}') \\ &\approx \vec{\omega}' + \frac{1}{2} \vec{\psi} \times \vec{\omega}' + \frac{1}{12} \vec{\psi} \times (\vec{\psi} \times \vec{\omega}')\end{aligned}$$

1971年，NASA保密项目，军用高精度定位

用欧拉角参数表示角速度

- 转动矩阵

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)$$

- 角速度

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \cdot \vec{X} &= \dot{R}R^T \\ &= \{\dot{R}_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi) + R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_z(\psi) \\ &\quad + R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)\}R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) \\ &= \dot{R}_z(\phi)R_z^T(\phi) + R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) \\ &\quad + R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi)\end{aligned}$$

- 逐项计算

第一项：

$$\begin{aligned}\dot{R}_z(\phi) &= \frac{d}{dt}e^{\phi X_3} = \dot{\phi}X_3e^{\phi X_3} \\ \Rightarrow \dot{R}_z(\phi)R_z^T(\phi) &= (\dot{\phi}X_3e^{\phi X_3})e^{-\phi X_3} = \dot{\phi}X_3 \\ &= (\dot{\phi}\vec{e}_z) \cdot \vec{X}\end{aligned}$$

第二项：

$$\begin{aligned}\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta) &= \dot{\theta}\vec{e}_x \cdot \vec{X} \\ \Rightarrow R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) &= R_z(\phi)(\dot{\theta}\vec{e}_x \cdot \vec{X})R_z^T(\phi)\end{aligned}$$

利用 $Q(\vec{n} \cdot \vec{X})Q^{-1} = (Q\vec{n}) \cdot \vec{X}$ ，得

$$R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) = (\dot{\theta}R_z(\phi)\vec{e}_x) \cdot \vec{X} = (\dot{\theta}\vec{e}_{x'}) \cdot \vec{X}$$

第三项：

$$\begin{aligned}\dot{R}_z(\psi)R_z^T(\psi) &= \dot{\psi}X_3R_z(\psi)R_z^T(\psi) = \dot{\psi}X_3 = \dot{\psi}\vec{e}_z \cdot \vec{X} \\ R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) \\ &= R_z(\phi)R_x(\theta)(\dot{\psi}\vec{e}_z \cdot \vec{X})R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) = \dot{\psi}(R_z(\phi)R_x(\theta)\vec{e}_z) \cdot \vec{X} \\ &= \dot{\psi}\vec{e}_{z''} \cdot \vec{X}\end{aligned}$$

总之有

$$\Rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{X} = \dot{\phi}\vec{e}_z \cdot \vec{X} + \dot{\theta}\vec{e}_{x'} \cdot \vec{X} + \dot{\psi}\vec{e}_{z''} \cdot \vec{X}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_{x'} + \dot{\psi}\vec{e}_{z''}}$$

与其它教材的图解结果对比

用欧拉角表示角速度：惯性系分量

- 计算得

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{x'} = R_z(\phi)\vec{e}_x = R_z(\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{z''} = R_z(\phi)R_x(\theta)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 代入

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_{x'} + \dot{\psi}\vec{e}_{z''}$$

得惯性系的角速度分量是

$$\begin{cases} \omega_x = \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_y = \sin \phi \dot{\theta} - \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_z = \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi} \end{cases}$$

用欧拉角表示角速度：随体系分量

$$\begin{cases} \omega_x = \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_y = \sin \phi \dot{\theta} - \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_z = \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi} \end{cases}$$

- 随体系的角速度分量

$$\vec{\omega}' = R^{-1} \vec{\omega}$$

或

$$\vec{\omega}' \cdot \vec{X} = R^{-1}(\vec{\omega} \cdot \vec{X})R = R^{-1} \dot{R} R^T R = \mathbf{R}^T \dot{R}$$

- 与惯性系表达式

$$\vec{\omega} \cdot \vec{X} = \dot{R} R^T = -\mathbf{R} \dot{R}^T$$

对比，只需要把上页 $\vec{\omega}$ 表达式做替换

$$R \rightarrow R^T$$

并乘以 (-1)

- $R \rightarrow R^T$ 等价于变换参数：

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi) R_x(\theta) R_z(\psi)$$

$$R^T(\phi, \theta, \psi) = R_z(-\psi) R_x(-\theta) R_z(-\phi)$$

$$\phi \rightarrow -\psi,$$

$$\theta \rightarrow -\theta$$

$$\psi \rightarrow -\phi$$

- 得欧拉运动学方程

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

- 把欧拉运动学方程写成矩阵形式，

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

- 反解得

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \psi}{\sin \theta} & \frac{\cos \psi}{\sin \theta} & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\frac{\cos \theta \sin \psi}{\sin \theta} & -\frac{\cos \theta \cos \psi}{\sin \theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

上式在 $\theta \approx 0, \pi$ 时发散，会导致定位导航算法失效。

Bortz方程使用角位移参数，没有这个缺点。

固定在刚体上的点的速度

- 为写出拉氏函数作准备，我们需要刚体中任意一个点 P 的速度表达式

- 位移

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_{CP}(t) + \vec{r}_C(t) = R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{r}_C(t)$$

- 速度

$$\begin{aligned}\vec{v}_P(t) &= \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \dot{R}(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{v}_C(t) \\ &= \dot{R}(t)R^{-1}(t)R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{v}_C(t) \\ &= (\vec{\omega}(t) \cdot \vec{X})\vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t) \\ &= \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t)\end{aligned}$$

瞬轴和瞬心

- 沿着角速度的方向，并且通过一（瞬时速度是零的）固定点的直线，称为瞬轴

- 推论*

任一时刻刚体的一般运动状态，可分为3类：

(1) 平动；

(2) 转动（在扩大刚体上有瞬时转动轴）；

(3) 螺旋运动（有瞬轴，但是瞬轴上点的速度不为零）。

对于第3种情况，如果把基点从C改为A，那么刚体上任意一点的牵连速度改变量是

$$\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CA}(t)$$

对于瞬轴上的点P，速度 $\vec{v}_P \parallel \vec{\omega}$ ，所以

$$\vec{v}_P \perp \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CA}(t)$$

$\vec{v}_P$ 不能被 $\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CA}(t)$ 抵消——螺旋运动没有静止的瞬轴。

平面平行运动

- 刚体的平面平行运动

角速度非零时，必存在唯一的瞬心（瞬时转动中心）。

- 瞬心在随体坐标系划过的轨迹，称为本体极迹

- 瞬心在惯性坐标系的轨迹称为空间极迹

- 例：火车的车轮在铁轨上的运动

铁轨是空间极迹

轮缘是本体极迹

