

第 7 章 刚体力学

一、 刚体运动的描述

1. 刚体模型

刚体定义为不会形变的质点组，即在运动过程中，质点组的任意两点之间的距离保持不变。

先来考虑刚体运动的自由度。

假如刚体只包含 1 个质点，则有 3 个直角坐标分量，自由度为 3。

添加一个质点，2 个质点构成的刚体，需要用 $3+3=6$ 个坐标分量来描述；由于这两点的距离在运动中保持不变，即有 1 个约束条件，故自由度（Degree of Freedom, DOF）为 $6-1=5$ 。

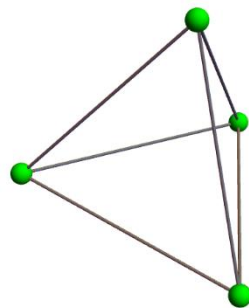
再添加一个质点，这时需要 $5+3=8$ 个坐标。而第三个点到其余两点的距离保持不变，有 2 个约束条件，所以 3 个质点构成的刚体自由度为 $8-2=6$ 。

4 个质点构成的刚体需要 $6+3=9$ 个坐标；第四个点到其余三点距离保持不变，有 3 个约束，所以自由度为 $9-3=6$ 。

.....

依此类推，N 个质点构成的刚体，共需要 6 个广义坐标描述刚体的位形。

假想在物体之外附着有无穷多个零质量的质点，这样刚体就充满了整个三维空间，称之为**扩大刚体**。



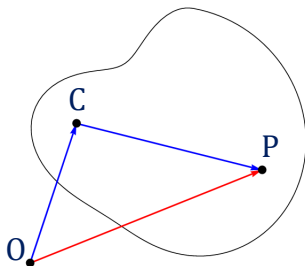
2. 随体坐标系和惯性系

在讨论刚体运动时，需要使用两套坐标系——随体坐标系和惯性系。

随体坐标系：固定在刚体上，跟随刚体一起运动的坐标系。

在刚体上取定一个**基点C**（也称为参考点），作为随体坐标系的原点，则刚体上任意一点P的位移可以表示为

$$\mathbf{r}_P(t) = \mathbf{r}_C(t) + \mathbf{r}_{CP}(t), \quad |\mathbf{r}_{CP}(t)| = \text{常数}$$



记惯性系的标准基为 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ，这组基正交、完备，且构成右手系，

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}, \quad \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \mathbf{1}, \quad (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

随体系的标准基记为

$$\mathbf{e}'_j(t), \quad j = 1, 2, 3.$$

刚体运动时，随体系的标准基随时间变化，但模长和夹角（垂直）不变，这组标准基一直满足正交归一和完备性，手征性也不变，

$$\mathbf{e}'_j(t) \cdot \mathbf{e}'_k(t) = \delta_{jk}, \quad \mathbf{e}'_j(t) \mathbf{e}'_j(t) = \mathbf{1}, \quad (\mathbf{e}'_1(t) \times \mathbf{e}'_2(t)) \cdot \mathbf{e}'_3(t) = 1$$

与刚体无相对运动的任意点P（与刚体无相对运动），在惯性系的坐标为

$$\mathbf{r}_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_P(t) \cdot \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, 3$$

随着刚体的运动而变化。

固定在刚体上的任意点P，在随体系的坐标为

$$\mathbf{r}'_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_{CP}(t) \cdot \mathbf{e}'_j(t) \equiv \mathbf{r}_{CP}(0) \cdot \mathbf{e}'_j(0), \quad j = 1, 2, 3$$

随体系的坐标，在刚体的运动时不变。

3. 刚体的一般运动

定义从随体系到惯性系的坐标变换矩阵

$$R_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_k(t), \quad j, k = 1, 2, 3.$$

又称为转动矩阵、方向余弦矩阵（Direction Cosine Matrix, DCM）。

同一个矢量 $\mathbf{a}$ ，在两个参考系中的坐标分量不同，两者之间的变换关系为

$$\begin{aligned} a_j &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_k(t) \mathbf{e}'_k(t) \cdot \mathbf{e}_j = R_{jk}(t) a'_k \\ \vec{a} &= R \vec{a}' \end{aligned}$$

考虑刚体上任意固定点P的位移，

$$\mathbf{r}_P(t) = \mathbf{r}_C(t) + \mathbf{r}_{CP}(t)$$

等式两边同时点乘 $\mathbf{e}_j$ ，

$$\mathbf{r}_{Pj}(t) = \mathbf{r}_{Cj}(t) + \mathbf{r}_{CP}(t) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{r}_{Cj}(t) + \mathbf{r}_{CP}(t) \cdot \mathbf{e}'_k(t) \mathbf{e}'_k(t) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{r}_{Cj}(t) + r'_{CP,k}(t) R_{jk}(t)$$

上式中矢量的内积

$$\vec{r}'_{CP}(t) = \mathbf{r}_{CP}(t) \cdot \mathbf{e}'_k(t)$$

是点 P 在随体系中的坐标， $\mathbf{r}_{CP}$ 与坐标架 $\mathbf{e}'_k$ 一起跟随刚体运动，所以两者的内积不变，

$$\vec{r}'_{CP}(t) = \vec{r}'_{CP}(0)$$

为了表述简洁，不妨设 $t = 0$ 时随体系与惯性系的坐标轴方向重合，

$$\mathbf{e}_j(0) = \mathbf{e}'_j(0)$$

$$R(t=0) = \mathbf{1}$$

因此有

$$\vec{r}'_{CP}(0) = \vec{r}_{CP}(0)$$

转动矩阵 $R(t)$ 是从随体系到惯性系的坐标变换矩阵，两者的关系是

$$\boxed{\vec{r}_P(t) = R(t) \vec{r}_{CP}(0) + \vec{r}_C(t)}$$

上面的等式即刚体运动的沙勒（Chasles）定理。

沙勒定理：刚体最一般位移可以分解为绕基点的转动和随基点的平移。

推论 改变基点，转动矩阵不变。

证明：转动矩阵的定义是

$$R_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_k(t)$$

把基点从 C 改为 A，而不改变坐标轴的取向，不会改变转动矩阵的矩阵元。

二、 刚体转动的广义坐标

1. 转动矩阵作为广义坐标

(1) 转动矩阵的正交性

由转动矩阵的定义，（第一章已证）

$$RR^T = \mathbf{1}, \quad R^T R = \mathbf{1}$$

(2) 转动矩阵的行列式

惯性系和随体系都是右手系，（第一章已证）

$$\det R = 1$$

也可以利用

$$RR^T = \mathbf{1} \Rightarrow \det R = \pm 1$$

$$R(0) = \mathbf{1}$$

以及 $\det R(t)$ 是时间的连续函数得出此结论。

(3) 转动矩阵作为刚体运动的广义坐标

转动矩阵有 9 个矩阵元, 6 个独立约束, 剩下 3 个自由度。再加上随基点的平移 $\vec{r}_C(t)$ 这 3 个广义坐标, 刚好是刚体运动的 6 个自由度。

但 9 个矩阵元 $R_{jk}(t)$ 不独立, 需满足约束方程

$$R_{jl}R_{kl} = \delta_{jk}, \quad \det R = 1$$

运动方程是 Sylvester 方程, 较难求解。

2. 角位移参数

我们希望能找到三个独立的参数作为广义坐标, 这需要进一步分析转动矩阵。

(1) 欧拉转动定理

定理 刚体的任意定点转动, 都有一个(定点之外的)不动点; 或者叙述为, 刚体的定点运动等价于绕某转动轴的转动。

欧拉在 1776 年用球面几何证明了此结论。下面的证明利用了线性代数中的谱定理。

证明: 转动矩阵 R 有三个特征值 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$,

$$\left. \begin{aligned} R\vec{a} = \lambda\vec{a} \Rightarrow \vec{a}^\dagger R^T R \vec{a} = |\lambda|^2 \vec{a}^\dagger \vec{a} \\ R^T R = \mathbf{1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= e^{i\psi}, \psi \in [0, 2\pi] \\ \lambda_3 &= e^{-i\psi} \end{aligned} \right.$$

$$\det(R - \lambda\mathbf{1}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 = \lambda_3^*$$

$\lambda_1 = 1$ 对应的特征矢分解为实部与虚部之和,

$$\vec{n} \triangleq \vec{a} + i\vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

满足特征方程

$$R\vec{n} = \vec{n} \Rightarrow R\vec{n}^* = \vec{n}^*$$

即

$$R\vec{a} = \vec{a}, \quad R\vec{b} = -\vec{b} \Rightarrow \vec{a} \propto \vec{b}$$

因此可约定 $\vec{n}$ 为实单位矢量,

$$R\vec{n} = \vec{n}, \quad \vec{n}^* = \vec{n}, \quad \vec{n}^2 = 1$$

特征矢 $\vec{n}$ 是转动轴。

(2) 转动矩阵的角位移参数

若矢量 $\vec{r}$ 绕 $\vec{n}$ 方向转动轴转无穷小角度 ϵ ，则

$$\vec{r}' = \vec{r} + \epsilon \vec{n} \times \vec{r}$$

$$r_i = r_i + \epsilon \epsilon_{ijk} n_j r_k = (\delta_{ik} + \epsilon \epsilon_{ijk} n_j) r_k$$

写成矩阵形式，

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = (\mathbf{1}_{3 \times 3} + \epsilon n_j X_j) \vec{r} = e^{\epsilon n_j X_j} \vec{r}$$

绕着 $\vec{n}$ 轴连续转动有限角度，

$$\vec{r}' = e^{\epsilon n_j X_j} \dots e^{\epsilon n_j X_j} \vec{r} = e^{\epsilon n_j X_j + \dots + \epsilon n_j X_j} \vec{r} = e^{\psi n_j X_j} \vec{r} = e^{\psi \vec{n} \cdot \vec{X}} \vec{r}$$

所以转动矩阵可以参数化为

$$R(\vec{\psi}) = e^{\psi_j X_j} = e^{\psi \vec{n} \cdot \vec{X}}$$

参数 $\vec{\psi} = \psi \vec{n}$ 称为**角位移** (Angular Displacement)、**罗德里格斯参数** (Rodrigues Parameters) 或**角轴参数** (Angle-Axis Parameters)。这正是我们需要的三个独立广义坐标。

(3) 转动矩阵的表达式

我们来计算转动矩阵的显式表达式。

如果记

$$X_{\vec{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{X} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

那么矩阵 $X_{\vec{n}}$ 的特征值是 $\{0, i, -i\}$ 。由凯莱-哈密顿定理，

$$e^{\psi X_{\vec{n}}} = c_0 \mathbf{1} + c_1 X_{\vec{n}} + c_2 X_{\vec{n}}^2$$

从方程组

$$\begin{cases} e^0 = c_0 \\ e^{i\psi} = c_0 + (i\psi)c_1 + (i\psi)^2 c_2 \\ e^{-i\psi} = c_0 + (-i\psi)c_1 + (-i\psi)^2 c_2 \end{cases}$$

解出 $\{c_0, c_1, c_2\}$ ，得

$$R(\vec{\psi}) = e^{\psi X_{\vec{n}}} = \mathbf{1} + X_{\vec{n}}^2 (1 - \cos \psi) + X_{\vec{n}} \sin \psi = \mathbf{1} \cos \psi + \vec{n} \vec{n}^T (1 - \cos \psi) + X_{\vec{n}} \sin \psi$$

$$R(\vec{\psi}) = \begin{pmatrix} n_1^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & n_1 n_2(1 - \cos \psi) - n_3 \sin \psi & n_1 n_3(1 - \cos \psi) + n_2 \sin \psi \\ n_1 n_2(1 - \cos \psi) + n_3 \sin \psi & n_2^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & n_2 n_3(1 - \cos \psi) - n_1 \sin \psi \\ n_1 n_3(1 - \cos \psi) - n_2 \sin \psi & n_2 n_3(1 - \cos \psi) + n_1 \sin \psi & n_3^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi \end{pmatrix}$$

例如绕转动轴的转动，其转动矩阵是

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

转动矩阵满足

$$R(2\pi\vec{n}) = \mathbf{1}$$

绕定轴 $\vec{n}$ 转动一圈，等效于恒等变换。

作用于矢量 $\vec{k}$ ，可得

$$\begin{aligned} R(\vec{\psi})\vec{k} &= \{\mathbf{1} + X_{\vec{n}}^2(1 - \cos \psi) + X_{\vec{n}} \sin \psi\}\vec{k} = \vec{k} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{k})(1 - \cos \psi) + (\vec{n} \times \vec{k}) \sin \psi \\ &= (\vec{n} \cdot \vec{k})\vec{n} + \{\vec{k} - (\vec{n} \cdot \vec{k})\vec{n}\} \cos \psi + (\vec{n} \times \vec{k}) \sin \psi \end{aligned}$$

正是前面章节讨论过的罗德里格斯转动公式。

(4) 角位移不能线性相加

Rodrigues 参数虽被称为角位移，但并不满足平行四边形法则，不能像通常的矢量那样线性相加。由 BCH 公式

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A-B,[A,B]]+\dots}$$

知

$$e^{\vec{\psi}_1 \cdot \vec{X}} e^{\vec{\psi}_2 \cdot \vec{X}} \neq e^{(\vec{\psi}_1 + \vec{\psi}_2) \cdot \vec{X}}$$

这与位移不同。

但是无穷小的转动是可加的，

$$e^{\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{X}} e^{\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{X}} = (\mathbf{1} + \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{X})(\mathbf{1} + \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{X}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbf{1} + \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{X} + \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{X} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = e^{(\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2) \cdot \vec{X}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

(5) 转动轴的转动

考虑坐标系变换 $Q \in SO(3)$ ，矢量和矩阵分别变为

$$\vec{a} \rightarrow Q\vec{a}, \quad M \rightarrow QMQ^{-1}$$

转动矩阵应该按矩阵变化，

$$R(\psi\vec{n}) \rightarrow QR(\psi\vec{n})Q^{-1} = \exp\{Q(\vec{\psi} \cdot \vec{X})Q^{-1}\}$$

而我们知道

$$\left. \begin{aligned} Q_{jj'} Q_{kk'} Q_{ll'} \varepsilon_{j'k'l'} &\equiv \det Q \varepsilon_{jkl} \\ \det Q &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_{jj'} Q_{kk'} Q_{ll'} \varepsilon_{j'k'l'} = \varepsilon_{jkl} \Rightarrow Q_{jj'} Q_{kk'} Q_{ll'} (X_{j'})_{k'l'} = (X_j)_{kl}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{乘以 } Q_{ji}} Q_{kk'} Q_{ll'} (X_i)_{k'l'} = Q_{ji} (X_j)_{kl} \Rightarrow Q X_i Q^T = Q_{ji} X_j \\ &\Rightarrow \boxed{Q(\vec{\psi} \cdot \vec{X}) Q^{-1} = (Q\vec{\psi}) \cdot \vec{X}} \end{aligned}$$

所以有

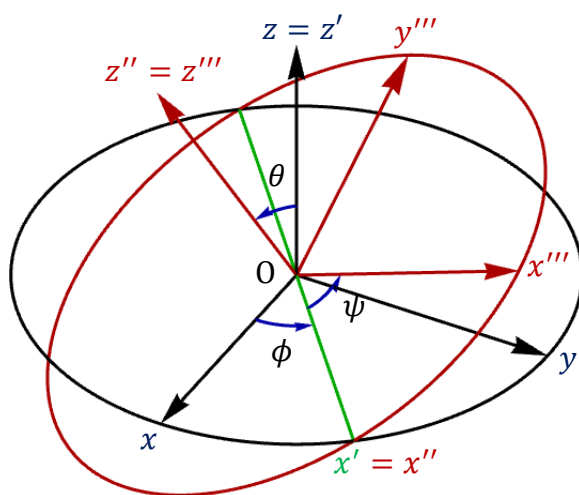
$$\boxed{QR(\psi\vec{n})Q^{-1} = R(\psi Q\vec{n})}$$

即转动轴按矢量转动，转动角不变。这一点从几何意义很好理解。

3. EULER 角参数

(1) 定义

除了角位移之外，描述刚体运动还常用 Euler 角参数，把刚体转动分解成三个转动矩阵之积：



①随体坐标架绕 z 轴逆时针转 ϕ 角， $Oxyz \rightarrow Ox'y'z'$ ；

②随体坐标架绕—— x' 轴（称为**节线**）逆时针旋转 θ 角， $Ox'y'z' \rightarrow Ox''y''z''$ ；

③随体坐标架绕 z'' 轴逆时针旋转 ψ 角。

即

$$\boxed{R(\phi, \theta, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} R_{z''}(\psi) R_{x'}(\theta) R_z(\phi)}$$

如果一个矢量在惯性系的分量是 $\vec{a}$ ，在跟随刚体转动之后，这个矢量在惯性系的坐标分量成为 $R(\phi, \theta, \psi)\vec{a}$ 。

随体系的第 3 轴，转动之后的方向由纬度 θ 和经度 ϕ 确定。按天文学的习惯， $\theta \in [0, \pi]$ 是第 3 轴与 z 轴的夹角，称为**章动角**（nutation angle）； $\phi \in [0, 2\pi]$ 是第 3 轴绕 z 轴转过的角度，称为**进动角**（precession angle）； $\psi \in [0, 2\pi]$ 是刚体绕第 3 轴旋转的角度，称为**自转角**（intrinsic rotation, spin angle）。

(2) 转换为惯性系的转动

现在有

$$\begin{aligned} R_{z''}(\psi) R_{x'}(\theta) R_z(\phi) &= \{R_{x'}(\theta) R_{z'}(\psi) R_{x'}(\theta)^{-1}\} R_{x'}(\theta) R_z(\phi) = R_{x'}(\theta) R_{z'}(\psi) R_z(\phi) \\ &= \{[R_z(\phi) R_x(\theta) R_z(\phi)^{-1}] [R_z(\phi) R_z(\psi) R_z(\phi)^{-1}]\} R_z(\phi) = R_z(\phi) R_x(\theta) R_z(\psi) \end{aligned}$$

$$\boxed{R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi) R_x(\theta) R_z(\psi)}$$

将

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

代入计算得

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \psi \sin \phi & -\cos \theta \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \cos \theta \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

矩阵的最后一列，是随体系第 3 轴的方向。

上式是力学中习惯使用的定义。在群论和量子力学中，欧拉角的定义稍有区别，

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

比较 $R(\vec{\psi})$ 和 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 的第三行和第三列元素，易得到两种参数之间的关系

$$\alpha = \alpha(\vec{\psi}), \quad \beta = \beta(\vec{\psi}), \quad \gamma = \gamma(\vec{\psi})$$

所以 $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 能够取遍 $SO(3)$ 。

Tait-Bryan angles 常用于工程和控制领域，

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

三个角度分别称为横滚角（roll，轴向：前）、俯仰角（pitch，轴向：右）、航向角（yaw，轴向：下）。

(3) 欧拉角参数的缺点：万向节死锁 GIMBAL LOCK

①从机械结构上看，当陀螺仪两轴刚好重合时，转动时只有两个自由度，陀螺随框架转动；（图）

②从算法上看，当 $\theta = 0$ 时，参数有无穷多种取法，可能导致大数相减，丢失数值精度。



4. 用四元数表示转动*

(1) 用四元数表示转动

除了角位移、欧拉角这两种常用的广义坐标，还有多种参数可以描述刚体运动（参考附录），四元数是其中最重要的一种。

复数 $a + bi$ 表示平面上的矢量，并且可以表示对矢量的旋转和尺度变换， i 表示旋转 90° ，旋转任意角度 θ 的线性变换为 $e^{i\theta}$ 。

对 3 维空间，引进 3 个虚数单位，空间的点记为虚数

$$xi_1 + yi_2 + zi_3$$

i_1 表示绕 x -轴旋转 90° ，

$$i_1 i_2 = i_3, \quad i_1 i_3 = -i_2$$

依此类推；并且约定 $i_1^2 = -1$ 。总之，四元数乘法规则为

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1 \Leftrightarrow i_j i_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl} i_l$$

一个四元数由实部和虚部组成，又称为矢量部分和标量部分，

$$\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{i}$$

$$\text{Re } a = a_0, \quad \text{Im } a = \vec{a} \cdot \vec{i}$$

其复共轭定义为

$$a^* \stackrel{\text{def}}{=} a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3$$

两个四元数相乘得

$$ab = (a_0 + \vec{a} \cdot \vec{i})(b_0 + \vec{b} \cdot \vec{i}) = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}) + (a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{i}$$

四元数的乘法，交换律不成立，但满足结合律，

$$(ab)c = a(bc)$$

复共轭满足

$$(ab)^* = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}) - (a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{i} = b^* a^*$$

四元数的模长定义为

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^* a} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|ab| = \sqrt{(ab)^* (ab)} = \sqrt{b^* a^* a b} = \sqrt{(a^* a) b^* b} = |a| |b|$$

四元数的逆为

$$a^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^*}{|a|^2}$$

满足

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

如果利用单位模长的四元数 q ，对三维空间的矢量相似变换，

$$\tilde{r} \stackrel{\text{def}}{=} x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3$$

$$\tilde{r} \rightarrow \tilde{r}' = q\tilde{r}q^{-1}$$

$$qq^* = 1 \Rightarrow q^{-1} = q^*$$

这是线性变换，并且

$$\text{Re } \tilde{r}' = \text{Re } q\tilde{r}q^{-1} = \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} + \frac{1}{2}(q\tilde{r}q^{-1})^* = \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} - \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} = 0$$

$$|\tilde{r}'| = |q\tilde{r}q^{-1}| = |\tilde{r}|$$

模长不变，因此是正交变换，

$$q(\tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}})q^{-1} = (R\tilde{r}) \cdot \tilde{\mathbf{i}}$$

从上式可以读出，

$$R(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

这是二对一的映射，

$$R(-q) = R(+q)$$

如果参数化么模四元数，设

$$q(\vec{\psi}) = \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\psi} \cdot \tilde{\mathbf{i}}\right)$$

那么有

$$q(\tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}})q^{-1} \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\psi} \cdot \tilde{\mathbf{i}}\right)(\tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}})\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\psi} \cdot \tilde{\mathbf{i}}\right) \Rightarrow q(\tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}})q^{-1} = \tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}} + \left[\frac{1}{2}\vec{\psi} \cdot \tilde{\mathbf{i}}, \tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}}\right] + \dots \Rightarrow e^A B e^{-B} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots$$

$$\Rightarrow q(\tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}})q^{-1} = \tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}} + 2\psi_j r_k \left[\frac{1}{2}\mathbf{i}_j, \frac{1}{2}\mathbf{i}_k\right] + \dots \Rightarrow q(\tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}})q^{-1} = \tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}} + \psi_j r_k \varepsilon_{jkl} \mathbf{i}_l + \dots \Rightarrow \left[\frac{\mathbf{i}_j}{2}, \frac{\mathbf{i}_k}{2}\right] = \varepsilon_{jkl} \frac{\mathbf{i}_l}{2}$$

$$\Rightarrow q(\tilde{r} \cdot \tilde{\mathbf{i}})q^{-1} = r_l \mathbf{i}_l - \psi_j (X_j)_{kl} r_k \mathbf{i}_l + \dots = [\exp(\vec{\psi} \cdot \vec{X}) \tilde{r}] \cdot \tilde{\mathbf{i}}$$

这说明

$$R(\vec{\psi}) = \exp(\vec{\psi} \cdot \vec{X})$$

参数 $\vec{\psi}$ 是角位移。幺模四元数与三维空间的转动矩阵之间，存在二对一的对应。

如果对纯虚四元数作两次相似变换，则有

$$pq(\vec{r} \cdot \vec{i})q^{-1}p^{-1} = (pq)(\vec{r} \cdot \vec{i})(pq)^{-1}$$

$$(R(p)R(q)\vec{r}) \cdot \vec{i} = (R(pq)\vec{r}) \cdot \vec{i}$$

$$R(pq) = R(p)R(q)$$

幺模四元数的乘法与转动矩阵的乘法规则相同（同态），所以我们可以用幺模四元数来表示三维空间的转动。

实四元数对应三维欧氏空间的转动，而复四元数则与四维闵氏时空的洛伦兹变换同态。

(2) 四元数表示的优点

①线性，计算量小；

②易规整，可以在每次做完乘法之后，把所得的四元数模长归一，从而抑制计算中舍入误差的积累，而 DCM 计算中必须使用 SVD 规整；

③计算时无死锁。

因此在物理、计算机动画和工程控制中得到广泛应用。

三、 刚体运动的角速度

1. 角速度

我们来考虑转动，暂时忽略相对简单的平移。设

$$\vec{r}_c(t) = \vec{0}$$

$$\vec{r}_p(t) = R(t)\vec{r}_{cp}(0)$$

刚体上任意两点的距离在运动中都不变，所以 P 点在 $t + dt$ 时刻的坐标，与 t 时刻的坐标只相差一个无穷小角度的转动，

$$\vec{r}_p(t + dt) \equiv R(d\vec{\varphi})\vec{r}_p(t)$$

即

$$R(t + dt)\vec{r}_p(0) \equiv R(d\vec{\varphi})\{R(t)\vec{r}_p(0)\}$$

$$R(t + dt) = R(d\vec{\varphi})R(t)$$

$$R(d\vec{\varphi}) = R(t + dt)R^{-1}(t)$$

两边展开并保留到一阶无穷小量,

$$\mathbf{1} + \vec{X} \cdot d\vec{\varphi} = R(t + dt)R^{-1}(t) = [R(t) + \dot{R}(t)dt]R^{-1}(t) = \mathbf{1} + \dot{R}(t)R^{-1}(t)dt$$

$$\vec{X} \cdot d\vec{\varphi} = \dot{R}(t)R^{-1}(t)dt$$

定义角速度为

$$\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

那么反对称矩阵 $\vec{X} \cdot \vec{\omega}(t)$ 是

$$\boxed{\vec{X} \cdot \vec{\omega}(t) = \dot{R}(t)R^T(t)}$$

注意 $\vec{\omega} \neq d\vec{\varphi}/dt$, 角速度不是角位移的变化率。

当选择不同的参考点是, 转动矩阵不变, 于是角速度不变。

2. 角速度线性可加

由于无穷小转动的角位移线性可加,

$$\exp\{d\vec{\varphi}_1 \cdot \vec{X}\} \exp\{d\vec{\varphi}_2 \cdot \vec{X}\} = \exp\{(d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \cdot \vec{X}\}$$

角速度

$$\vec{\omega}_1 = \frac{d\vec{\varphi}_1}{dt}, \quad \vec{\omega}_2 = \frac{d\vec{\varphi}_2}{dt}$$

也是线性可加的。

3. 用四元数表示的角速度*

按角速度定义有

$$\begin{aligned} q(t + dt) &= \exp\left\{\frac{1}{2} d\vec{\varphi} \cdot \vec{i}\right\} q(t) \\ \Rightarrow \dot{q} &= \frac{1}{2} (\vec{\omega} \cdot \vec{i}) q \Rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{i} = 2\dot{q}q^* \\ &\Rightarrow \vec{\omega}' \cdot \vec{i} = 2q^*\dot{q} \end{aligned}$$

在定位导航应用中, 利用传感器获得随体坐标系的角速度 $\vec{\omega}'(t) = \vec{\omega}' \cdot \vec{i}$, 然后由 (我们仍然称之为欧拉运动学方程)

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \vec{\omega}'$$

可解出车辆、飞行器等运动物体的姿态四元数 $q(t)$ 。

4. 用角位移参数表示的角速度

如果用角位移参数表示转动，则

$$R(t) = e^{\vec{\psi}(t) \cdot \vec{X}}$$

$$\vec{X} \cdot \vec{\omega}(t) = \dot{R} R^T \xrightarrow{\text{transpose}} -\vec{X} \cdot \vec{\omega} = R \dot{R}^T$$

利用矩阵指数求导公式

$$\frac{d}{dt} e^A = e^A \left(\frac{\mathbf{1} - e^{-\text{ad}_A}}{\text{ad}_A} \right) A, \quad \text{ad}_A \circ B \stackrel{\text{def}}{=} [A, B]$$

计算得

$$\text{ad}_{\vec{a} \cdot \vec{X}} \circ (\vec{b} \cdot \vec{X}) = [\vec{a} \cdot \vec{X}, \vec{b} \cdot \vec{X}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{X} = \{(\vec{a} \cdot \vec{X}) \vec{b}\} \cdot \vec{X}$$

$$(\text{ad}_{\vec{a} \cdot \vec{X}})^2 \circ (\vec{b} \cdot \vec{X}) = \text{ad}_{\vec{a} \cdot \vec{X}} \circ \{(\vec{a} \cdot \vec{X}) \vec{b}\} \cdot \vec{X} = \{(\vec{a} \cdot \vec{X})^2 \vec{b}\} \cdot \vec{X}$$

所以对任意矩阵函数有

$$f(\text{ad}_{\vec{a} \cdot \vec{X}}) \circ (\vec{b} \cdot \vec{X}) = \{f(\vec{a} \cdot \vec{X}) \vec{b}\} \cdot \vec{X}$$

利用上式计算角速度，

$$\begin{aligned} \vec{X} \cdot \vec{\omega} &= -R \dot{R}^T = - \left(\frac{\mathbf{1} - e^{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}}}{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} \right) \circ (-\dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{X}) = \left(\frac{e^{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} - \mathbf{1}}{\text{ad}_{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} \right) \circ (\dot{\vec{\psi}} \cdot \vec{X}) \\ &= \left(\frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}} \right) \cdot \vec{X} \end{aligned}$$

所以在惯性系的角速度分量为

$$\vec{\omega} = \frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}}$$

化简右边的矩阵函数，得

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \dot{\vec{\psi}} + \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} (\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}}) + \frac{\psi - \sin \psi}{\psi^3} \{ \vec{\psi} \times (\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}}) \}$$

在随体系 $\vec{X} \cdot \vec{\omega}' = -\dot{R}^T R$ ；只需 $R \rightarrow R^T \Leftrightarrow \vec{\psi} \rightarrow -\vec{\psi}$ ，且乘以 (-1) ，

$$\vec{\omega}' = \frac{\mathbf{1} - e^{-\vec{\psi} \cdot \vec{X}}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}}$$

化简后得随体系的角速度分量

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \dot{\vec{\psi}} - \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} (\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}}) + \frac{\psi - \sin \psi}{\psi^3} \{ \vec{\psi} \times (\vec{\psi} \times \dot{\vec{\psi}}) \}$$

5. BORTZ 方程*

在惯性导航系统（INS）中，传感器测的是随体系中的角速度和加速度分量。

为了求解位姿，反解得

$$\dot{\vec{\psi}} = \frac{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}{1 - e^{-\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} \vec{\omega}'$$

$$\frac{\vec{\psi} \cdot \vec{X}}{1 - e^{-\vec{\psi} \cdot \vec{X}}} = 1 + \frac{1}{2} \vec{\psi} \cdot \vec{X} + \frac{2 \sin \psi - \psi(1 + \cos \psi)}{2\psi^2 \sin \psi} (\vec{\psi} \cdot \vec{X})^2$$

有 Bortz 方程¹（），

$$\dot{\vec{\psi}} = \vec{\omega}' + \frac{1}{2} \vec{\psi} \times \vec{\omega}' + \frac{2 \sin \psi - \psi(1 + \cos \psi)}{2\psi^2 \sin \psi} \vec{\psi} \times (\vec{\psi} \times \vec{\omega}')$$

可积分求解刚体姿态。

小角度时可略去高阶项，

$$\frac{2 \sin \psi - \psi(1 + \cos \psi)}{2\psi^2 \sin \psi} = \frac{1}{12} + \frac{\psi^2}{720} + \dots$$

$$\dot{\vec{\psi}} \approx \vec{\omega}' + \frac{1}{2} \vec{\psi} \times \vec{\omega}' + \frac{1}{12} \vec{\psi} \times (\vec{\psi} \times \vec{\omega}')$$

6. 用欧拉角参数表示的角速度

使用欧拉角参数作为广义坐标时，角速度在惯性系的分量为

$$\vec{\omega} \cdot \vec{X} = \dot{R} R^T = \dot{R}_z(\phi) R_z^T(\phi) + R_z(\phi) \dot{R}_x(\theta) R_x^T(\theta) R_z^T(\phi) + R_z(\phi) R_x(\theta) \dot{R}_z(\psi) R_z^T(\psi) R_x^T(\theta) R_z^T(\phi)$$

逐项计算，

$$\dot{R}_z(\phi) R_z^T(\phi) = \dot{\phi} \vec{e}_z \cdot \vec{X}$$

$$\dot{R}_x(\theta) R_x^T(\theta) = \dot{\theta} \vec{e}_x \cdot \vec{X} \Rightarrow R_z(\phi) \dot{R}_x(\theta) R_x^T(\theta) R_z^T(\phi) = \dot{\theta} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{X}$$

$$R_z(\phi) R_x(\theta) \dot{R}_z(\psi) R_z^T(\psi) R_x^T(\theta) R_z^T(\phi) = \dot{\psi} \vec{e}_{z''} \cdot \vec{X}$$

于是

$$\vec{\omega} \cdot \vec{X} = \dot{\phi} \vec{e}_z \cdot \vec{X} + \dot{\theta} \vec{e}_{x'} \cdot \vec{X} + \dot{\psi} \vec{e}_{z''} \cdot \vec{X}$$

¹ 1969 年的博士论文，解决了“划桨现象”、“圆锥误差”发表于 1971 年：

J. E. Bortz, "A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation," in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-7, no. 1, pp. 61-66, Jan. 1971, doi: 10.1109/TAES.1971.310252.

NASA 支助的军用高精度定位项目。论文没有使用矩阵函数，矩阵函数的方法更简单快捷。

$$\vec{e}_{x'} = R_z(\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{z''} = R_x(\theta) R_z(\phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} &= \dot{\phi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_{x'} + \dot{\psi} \vec{e}_{z''} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin \phi \sin \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \\ 0 & \sin \phi & -\cos \phi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ &\begin{cases} \omega_x = \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_y = \sin \phi \dot{\theta} - \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_z = \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi} \end{cases} \end{aligned}$$

角速度在随体坐标系中的分量满足

$$\vec{\omega}' \cdot \vec{X} = R^{-1}(\vec{\omega} \cdot \vec{X})R = R^{-1}(\dot{R}R^T)R = R^{-1}\dot{R} = R^T\dot{R}$$

对比惯性系的表达式

$$\vec{\omega} \cdot \vec{X} = \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T$$

可见只需把前面结果中 $R \rightarrow R^{-1} \Leftrightarrow \phi \rightarrow -\psi, \theta \rightarrow -\theta, \psi \rightarrow -\psi$, 最后再乘以 (-1) ,

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

上式即刚体的 Euler 运动学方程。

反解随体系的 Euler 运动学方程, 得

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \psi}{\sin \theta} & \frac{\cos \psi}{\sin \theta} & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\frac{\cos \theta \sin \psi}{\sin \theta} & -\frac{\cos \theta \cos \psi}{\sin \theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

此式可用于定位导航, 但在 $\theta \approx 0$ 时失效, 而 Bortz 方程则不存在这个缺点。

7. 刚体上任意固定点的速度

刚体上任一固定点的位移

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_{CP}(t) + \vec{r}_C(t) = R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{r}_C(t)$$

对时间求导,

$$\begin{aligned}\vec{v}_P(t) &= \dot{R}(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{v}_C(t) \\ &= \dot{R}(t)R^{-1}(t)R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{v}_C(t) = (\vec{\omega}(t) \cdot \vec{X})\vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t) \\ &= \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t)\end{aligned}$$

8. 瞬轴和瞬心

推论 任一时刻刚体的一般运动状态, 可分为 3 类:

(1) 平动; (2) 转动 (有**瞬轴**); (3) 螺旋运动。

证明: (1) $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$ 为平动。

当 $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$ 时,

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CA}(t) + \vec{v}_C(t)$$

由于 A 点可自由选择, $\vec{r}_{CA}(t)$ 可取任意值。通过选择基点, 第一项 $\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CA}(t)$ 可以凑成任意垂直于 $\vec{\omega}(t)$ 的矢量。于是选择 A 点, 以抵消 $\vec{v}_C(t)$ 项, 使 $\vec{v}_A$ 垂直 $\vec{\omega}(t)$ 方向的分量为零, 这时

(2) 若 $v_A = 0$, 则刚体有**瞬时转动轴** $\vec{r}_A + \lambda \vec{\omega}$, 轴上点的速度为

$$\vec{v}_P(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{AP}(t) + \vec{0} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_A + \lambda \vec{\omega} - \vec{r}_A) = \vec{0}$$

这一时刻刚体绕瞬轴作纯转动;

(3) 若 $v_A \neq 0$, 则刚体作螺旋运动, 即绕螺旋轴 $\vec{r}_A + \lambda \vec{\omega}$ 转动的同时, 还沿螺旋轴方向以速度 v_A 平动。

推论 对刚体的平面平行运动, 角速度非零时, 必存在唯一的瞬心。

瞬心在随体坐标系划过的轨迹, 称为**本体极迹**, 在惯性坐标系的轨迹称为**空间极迹**。

例 火车的车轮沿着铁轨作纯滚动, 车轮与铁轨的接触点是瞬时转动中心。本体极迹是车轮上的一个圆, 空间极迹是直线 (铁轨)。

9. 角加速度

在惯性系中, 角加速度定义为

$$\vec{\varepsilon}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

推论 角加速度矢量可加。

刚体上任一固定点的加速度为

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t)\} \\ &= \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\dot{R}(t)\vec{r}_{CP}(0)) + \vec{a}_C(t) \\ &= \vec{\varepsilon}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t)) + \vec{a}_C(t)\end{aligned}$$

3 项分别为转动牵连加速度、向轴牵连加速度和平动牵连加速度。

四、 定点转动

1. 转动惯量张量

刚体的动能为

$$T = \sum_P \frac{1}{2} m_P \dot{\vec{r}}_P^2 = \sum_P \frac{1}{2} m_P [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t)]^2$$

取 $\vec{v}_C(t) = \vec{0}$ ，得转动动能为

$$T = \sum_P \frac{1}{2} m_P [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_P m_P [\vec{r}_{CP}^2 \vec{\omega}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{CP})^2]$$

是角速度的二次型。

定义转动惯量张量

$$\vec{I} = \sum_P m_P (\vec{r}_{CP}^2 \mathbf{1} - \vec{r}_{CP} \vec{r}_{CP}^T)$$

则刚体的转动动能表示为

$$T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$$

对连续的质量分布，转动惯量张量为

$$I_{jk} = \iiint \rho(x, y, z) (r^2 \delta_{jk} - r_j r_k) dx dy dz$$

推论 转动惯量张量对称、正定（除了质量分布在一条直线的情形）。

推论 平行轴定理

$$\vec{I} = \vec{I}_C + M(\vec{r}_C^2 \mathbf{1} - \vec{r}_C \vec{r}_C^T)$$

相对于参考点 C 的角动量为

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P \dot{\vec{r}}_{CP} = \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}) \\ J_i &= \sum_P \varepsilon_{ijk} r_{CP,j} m_P \varepsilon_{klm} \omega_l r_{CP,m} = \sum_P r_{CP,j} m_P \omega_l r_{CP,n} (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) = \sum_P m_P \omega_l (\delta_{il} r_{CP}^2 - r_{CP,i} r_{CP,l}) \\ &= I_{il} \omega_l \\ J_j &= I_{jk} \omega_k\end{aligned}$$

角动量一般不与角速度平行。

选择不同的参考点时，虽然角速度不变，但是转动惯量不同，角动量、力矩也不同。

动量和动能可以在随体坐标系中计算，也可以在惯性系中计算。在惯性系中计算时，由于刚体在运动，因而质量的空间分布 $\rho(x, y, z)$ 随时间变化， I_{jk} 随之而变；在随体系中计算时， I_{jk} 是常数，会更方便应用。

2. 惯量张量的主轴

按谱定理，正定的实对称矩阵，可以利用实正交矩阵对角化。设

$$I \vec{a} = \lambda \vec{a}$$

特征值称为**主转动惯量**，特征矢称为**主轴**；三个主轴相互正交（Sylvester 惯性定理）。

随体坐标系可以选取主轴为坐标轴，即**主轴坐标系**，这时转动惯量为对角阵，

$$\begin{aligned}I &= \text{diag}\{I_1, I_2, I_3\} \\ T &= \frac{1}{2} \sum_j I_j \omega_j^2, \quad J_i = I_i \omega_i (\text{指标 } i \text{ 不求和})\end{aligned}$$

3. 惯量椭球

考虑定轴转动的动能，

$$T = \frac{1}{2} I_n \omega^2$$

与一般情形的转动动能比较得

$$T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k = \frac{1}{2} I_n \omega^2 \Rightarrow I_n = I_{jk} n_j n_k$$

引进

$$\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_n}}$$

$$I_n = I_{jk} n_j n_k \\ \Leftrightarrow 1 = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{13}xz + 2I_{23}yz$$

这个方程决定的曲面称为惯量椭球。

惯量椭球的物理意义：原点到椭球面上的距离为 $\rho = \frac{1}{\sqrt{I_n}}$

回转半径： $mk^2 = I_n \Rightarrow k = \sqrt{I_n/m}$

4. 定点转动的动力学方程

作用量为

$$S[\vec{\psi}] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k - V[t, \vec{r}_{CP}(t)] \right\} dt$$

利用哈密顿原理写方程时，需要计算转动矩阵的变分，

$$\vec{X} \cdot \vec{\omega} = \dot{R} R^T \Rightarrow \vec{X} \cdot d\vec{\varphi} = (dR) R^T \Rightarrow \vec{X} \cdot \delta\vec{\varphi} = (\delta R) R^T \\ \Rightarrow \delta R = (\vec{X} \cdot \delta\vec{\varphi}) R$$

与角位移变分的关系为，

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} = \frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \dot{\vec{\psi}} \Rightarrow \delta\vec{\varphi} = \frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \delta\vec{\psi}$$

由于

$$\det \frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - \mathbf{1}}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \neq 0$$

可见 $\delta\vec{\varphi}$ 是 3 个独立的变分。

在作用量表达式中，动能项的变分为

$$\delta \left(\frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k \right) = \delta \left(\frac{1}{2} I'_{jk} \omega'_j \omega'_k \right) = I'_{jk} \omega'_j \delta \omega'_k = J'_k \delta \omega'_k = J_k \delta \omega_k = J_k \delta \frac{d\varphi_k}{dt} = J_k \frac{d}{dt} \delta \varphi_k$$

在对作用量变分时，作分部积分，边界项为零，所以

$$\delta \left(\frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k \right) \sim -\dot{J} \cdot \delta\vec{\varphi}$$

势能项的变分是

$$\begin{aligned}
\delta V[t, \vec{r}_{CP}] &= \sum_P \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{CP}} \cdot \delta \vec{r}_{CP} = \sum_P \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{CP}} (\delta R) \vec{r}_{CP}(0) = \sum_P \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{CP}} \cdot (\vec{X} \cdot \delta \vec{\varphi}) R \vec{r}_{CP}(0) \\
&= \sum_P \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{CP}} \cdot (\vec{X} \cdot \delta \vec{\varphi}) \vec{r}_{CP} = - \sum_P \vec{F}_{CP} \cdot (\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_{CP}) = - \delta \vec{\varphi} \cdot \sum_P \vec{r}_{CP} \times \vec{F}_{CP} \\
&= - \vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi}
\end{aligned}$$

其中 P 点所受的力 $\vec{F}_{CP}$ 和刚体所受的总力矩 $\vec{M}$ 定义为

$$\vec{F}_{CP} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{CP}}, \quad \vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_P \vec{r}_{CP} \times \vec{F}_{CP}$$

总之有

$$\delta S[\vec{\psi}] = \int_{t_1}^{t_2} \{ -\dot{\vec{J}} + \vec{M} \} \cdot \delta \vec{\varphi} dt$$

因此哈密顿原理给出的运动方程是

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

即角动量定理。

5. EULER 动力学方程

运动方程 $\dot{\vec{J}} = \vec{M}$ 中的矢量，是惯性系的分量。

但是在惯性系， $J_i = I_{ij}\omega_j$ ，而 I_{ij} 是随时间变化的，把方程中的矢量、张量改写成随体系中的分量，会比较简洁，为此在两边同乘以 R^{-1} ，

$$R^{-1}\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} (R^{-1}\vec{J}) - \dot{R}^T \vec{J} = \frac{d}{dt} (R^{-1}\vec{J}) - (\dot{R}^T R) (R^{-1}\vec{J}) \left\{ \begin{array}{l} R^{-1}R = \mathbf{1} \Rightarrow R^{-1}\dot{R} + \dot{R}^T R = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow R^{-1} \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} (R^{-1}\vec{J}) + (R^{-1}\dot{R})(R^{-1}\vec{J}) \sim \frac{d}{dt} J_a + (\omega_b X_b)_{ac} J_c$$

$$\dot{J}_a + \varepsilon_{abc} \omega_b J_c = I_{ab} \dot{\omega}_b + \varepsilon_{abc} \omega_b I_{cd} \omega_d = M_a$$

在随体系 (by Lagrange) 有

$$\boxed{\frac{d\vec{J}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{J}' = \vec{M}'}$$

在主轴坐标系， $J_i = I_i \omega_i$ (i 不求和)，得 Euler 动力学方程，

$$\boxed{\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}}$$

无外力时，Euler 动力学方程只涉及角速度，不涉及欧拉角——可以先解出角速度，然后代入运动学方程解出刚体的姿态。

6. 相对微商

前面的推导过程，对于任何矢量都适用，即任意矢量物理量 $\vec{A}$ 在惯性系的变化率

$$\vec{B} = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

在随体系（相对微商）的分量满足

$$\vec{B}' = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega}' \times \vec{A}'$$

7. 运动参考系中质点的位移、速度和加速度

考虑在运动参考系中运动的质点，质点在刚体上，并且有相对于刚体的运动。

参考点位移记为 $\vec{r}_C(t)$ ，则质点 P 的位移为

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_C(t) + \vec{r}_{CP}(t)$$

其速度为

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \frac{d}{dt} \vec{r}_{CP}$$

$$\vec{v}_P - \vec{v}_C = \frac{d}{dt} \vec{r}_{CP}$$

利用相对微商，

$$\vec{v}_P - \vec{v}_C = \frac{d}{dt} \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP} = \vec{v}'_C + \vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}$$

于是 P 点对惯性系的速度这一物理量，在随体系的分量为

$$\vec{v}'_P = \vec{v}'_C + \frac{d}{dt} \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP} = \vec{v}'_C + \vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}$$

式子两边同乘以 $R(t)$ ，变换为惯性系的分量，

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{v}_{CP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}$$

需注意其中相对速度的定义为

$$\vec{v}_{CP} = R \frac{d}{dt} \vec{r}'_{CP} \neq \frac{d}{dt} \vec{r}_{CP}$$

即相对于随体系坐标架的速度，在惯性系坐标轴上的投影（分量）。

推论 绝对速度 = 平动牵连速度 + 相对速度 + 转动牵连速度

对绝对速度公式再次求导，

$$\begin{aligned}\vec{v}_P - \vec{v}_C &= \vec{v}_{CP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP} \\ \vec{a}_P - \vec{a}_C &= \frac{d}{dt}(\vec{v}_P - \vec{v}_C) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{CP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP})\end{aligned}$$

在随体系的分量满足

$$\begin{aligned}\vec{a}'_P - \vec{a}'_C &= \frac{d}{dt} \vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) \\ &= \vec{a}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \frac{d\vec{\omega}'}{dt} \times \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \frac{d\vec{r}'_{CP}}{dt} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) \\ &= \vec{a}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \vec{\varepsilon}' \times \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) \\ &= \vec{\varepsilon}' \times \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) + \vec{a}'_{CP} + 2\vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP}\end{aligned}$$

乘以 $R(t)$ ，写成惯性系的分量，

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{CP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}) + \vec{a}_{CP} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{CP}$$

需要注意这里相对加速度的定义为：

$$\vec{a}_{CP} \stackrel{\text{def}}{=} R \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_{CP} \neq \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CP}$$

推论

绝对加速度 = 平动牵连加速度 + 转动牵连加速度 + 向轴(牵连)加速度 + 相对加速度
+ Coriolis 加速度

MEMS 微机电系统，陀螺仪，利用 Coriolis 加速度测角速度。

五、 EULER 陀螺

不受外力矩，并且作定点转动的刚体，称为**自由刚体**或**欧拉陀螺**。

1. 动力学方程

$$J_a + \varepsilon_{abc} \omega_b J_c = 0$$

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

2. 首次积分

转动动能守恒：拉氏量不含时。

角动量守恒：拉氏量转动对称，惯性系中角动量矢量守恒；或者在随体系， $\vec{J}^2 = \text{常数}$ （转动不改变矢量模长）。

3. 求解

利用首次积分消去 ω_1, ω_2 ,

$$\begin{cases} I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = J^2 \\ \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = T \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{(I_2 - I_3)I_3 \omega_3^2 - 2I_2 T + J^2}{(I_1 - I_2)I_1} \\ \omega_2^2 = \frac{(I_1 - I_3)I_3 \omega_3^2 - 2I_1 T + J^2}{(I_2 - I_1)I_2} \end{cases}$$

代入第三个 Euler 动力学方程

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2$$

积分即可解出 $\omega_3(t)$ （椭圆积分²），是 t 的周期函数²。把结果再代入 Euler 运动学方程可求得角位移或欧拉角。

4. 稳定解和陀螺仪

设 $I_1 < I_2 < I_3$ ，对 Euler 动力学方程的分析表明，沿着 I_1, I_3 方向的转动是稳定的，沿 I_2 方向的转动是不稳定的。（网球拍定理）

无外力矩作用的刚体，欧拉动力学方程为

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

- 如果初始时刻刚体沿2轴转动， $\omega_1, \omega_3 \sim 0$ ， $\omega_2 \gg \omega_1, \omega_3$ ，则

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \{ \dot{\omega}_2 \omega_3 + \omega_2 \dot{\omega}_3 \} = (I_2 - I_3) \left\{ \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3 \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \omega_2 \right\} \\ &= (I_2 - I_3) \left\{ \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3^2 + \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_2^2 \right\} \omega_1 \approx (I_2 - I_3) \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_2^2 \omega_1 \\ \ddot{\omega}_1 &= \text{正数} \times \omega_1 \end{aligned}$$

同样有

² 可参考 H.H 蒲赫哥尔兹，《理论力学基本教程（下）》，第4章第7节。

$$\begin{aligned}
I_3 \ddot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \{ \dot{\omega}_1 \omega_2 + \omega_1 \dot{\omega}_2 \} = (I_1 - I_2) \left\{ \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2 \omega_3 \omega_2 + \omega_1 \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_3 \omega_1 \right\} \\
&= (I_1 - I_2) \left\{ \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2^2 + \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1^2 \right\} \omega_3 \approx (I_1 - I_2) \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2^2 \omega_3
\end{aligned}$$

$$\ddot{\omega}_3 = \text{正数} \times \omega_3$$

$\omega_1(t), \omega_3(t)$ 将指数增长，刚体角速度迅速偏离原本的方向。不稳定。

- 如果初始时刻刚体沿1轴转动， $\omega_2, \omega_3 \sim 0$ ， $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$ ，则

$$\begin{aligned}
I_2 \ddot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \{ \dot{\omega}_3 \omega_1 + \omega_3 \dot{\omega}_1 \} = (I_3 - I_1) \left\{ \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \omega_1 \omega_2 \omega_1 + \omega_3 \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2 \omega_3 \right\} \\
&= - \left\{ \frac{I_1 - I_2}{I_3} (I_1 - I_3) \omega_1^2 + \frac{I_2 - I_3}{I_1} (I_1 - I_3) \omega_3^2 \right\} \omega_2 \approx - \frac{I_1 - I_2}{I_3} (I_1 - I_3) \omega_1^2 \omega_2
\end{aligned}$$

$$\ddot{\omega}_2 = \text{负数} \times \omega_2$$

同样

$$I_3 \ddot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \left\{ \frac{(I_2 - I_3)}{I_1} \omega_2^2 + \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1^2 \right\} \omega_3 \approx (I_1 - I_2) \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \omega_1^2 \omega_3$$

$$\ddot{\omega}_3 = \text{负数} \times \omega_3$$

$\omega_1(t), \omega_3(t)$ 将类似三角函数震荡，刚体角速度方向基本保持不变。稳定。

李雅普诺夫稳定性：Lyapunov stability

如果一个动力系统，初始时在平衡态附近的任何一个状态，之后均能维持在平衡态附近，那么称此平衡态李雅普诺夫稳定。

- 如果初始时刻刚体沿3轴转动， $\omega_1, \omega_2 \sim 0$ ， $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$ ，则

$$I_1 \ddot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \left\{ \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3^2 + \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_2^2 \right\} \omega_1 \approx (I_2 - I_3) \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3^2 \omega_1$$

$$I_2 \ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \left\{ \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1^2 + \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_3^2 \right\} \omega_2 \approx \frac{I_2 - I_3}{I_1} (I_3 - I_1) \omega_3^2 \omega_2$$

$$\ddot{\omega}_1 = \text{负数} \times \omega_1, \quad \ddot{\omega}_2 = \text{负数} \times \omega_2$$

$\omega_1(t), \omega_2(t)$ 将按三角函数震荡，刚体角速度方向基本保持不变。稳定。

类似可证，对称陀螺 $I_1 = I_2 \neq I_3$ ，若开始时沿1轴旋转，

$$I_2 \ddot{\omega}_2 = - \left\{ \frac{I_1 - I_2}{I_3} (I_1 - I_3) \omega_1^2 + \frac{I_2 - I_3}{I_1} (I_1 - I_3) \omega_3^2 \right\} \omega_2 = - \frac{I_2 - I_3}{I_1} (I_1 - I_3) \omega_3^2 \omega_2 \approx 0$$

$$\omega_2(t) \approx \varepsilon_2 t$$

不稳定；只有沿第三轴的运动是稳定的。

若惯量椭球是球形， $I_1 = I_2 = I_3$ ，则沿任意方向的转动都是不稳定的。

5. 瞬轴在惯量椭球上的轨迹

在主轴坐标系，转动能守恒，

$$I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 2T$$

而惯量椭球方程为

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1 \quad (*)$$

所以 $\vec{x} = \vec{\omega} / \sqrt{2T}$ 在惯量椭球上。

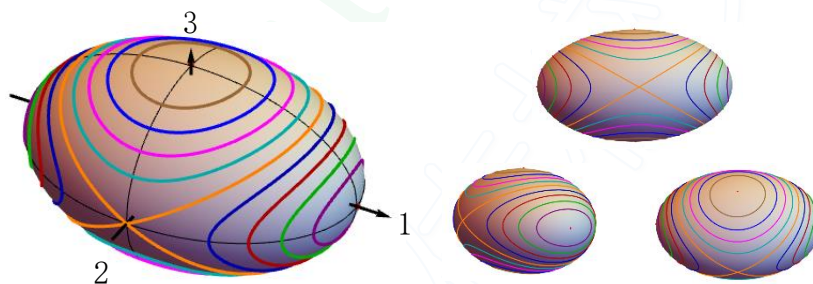
而首次积分 $\vec{J}^2 = \text{常数}$ ，

$$I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = J^2$$

即（等角动量）椭球面方程

$$I_1^2 x^2 + I_2^2 y^2 + I_3^2 z^2 = \frac{J^2}{2T} \quad (**)$$

瞬轴的轨迹是两个椭球面方程的交线。



从图中可以看出，绕 1-轴的转动和绕 3-轴的转动是稳定的，绕 2-轴的转动是不稳定的，这与前面利用运动方程推导得到的网球拍定理一致。

6. POINSON 对欧拉陀螺的几何描述

图像直观：惯量椭球是本体极面，空间极面是一个不动的平面（垂直于角动量）

设 P 点为惯量椭球与瞬时转动轴的交点，

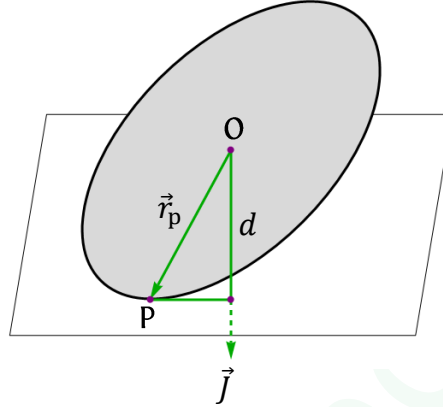
$$\vec{r}_p = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I}} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{I\omega}} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$$

在主轴系满足方程

$$1 = I_1 x_p^2 + I_2 y_p^2 + I_3 z_p^2$$

P 点处切平面的方向为 $(I_1 x_p \ I_2 y_p \ I_3 z_p)$, 切平面方程为

$$(I_1 x_p \ I_2 y_p \ I_3 z_p) \cdot \vec{r} = c$$



又 P 点在切平面中, 且满足

$$(I_1 x_p \ I_2 y_p \ I_3 z_p) \cdot \vec{r}_p = 1 \Rightarrow c = 1$$

得切平面在主轴系中的方程为

$$(I_1 x_p \ I_2 y_p \ I_3 z_p) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

i. 切平面法向沿角动量 $\vec{J}$:

在主体坐标系, $J_i = I_i \omega_i = \sqrt{2T} I_i r_{pi} \propto I_i r_{pi} = (I_1 x_p \ I_2 y_p \ I_3 z_p)$ (重复指标不求和), 平行于切向量。

在惯性系 $\vec{J}$ 是常数, 这说明切平面在惯性系的方向是不随时间改变的。

ii. 切平面到 O 点 (基点) 的距离 (截距) 不变:

$$\vec{OP} \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = \vec{r}_p \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}} \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = \frac{2T}{\sqrt{2T}|\vec{J}|} = \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{J}|} = \text{常数}$$

总之, 切平面在惯性系中静止不动, 惯量椭球在不动平面上作无滑动滚动。

7. 对称欧拉陀螺

(1) 求解动力学方程

如果陀螺是对称的, $I_1 = I_2$, 则在主轴系的动力学方程是

$$\begin{cases} 0 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 \\ 0 = I_1 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ 0 = I_3 \dot{\omega}_3 \end{cases}$$

由第三个方程得

$$\omega_3 = \text{常数}$$

记进动角速度为

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$$

动力学方程成为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega}_1 = -\Omega^2 \omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 = -\Omega^2 \omega_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) \end{cases}$$

这时角速度的大小

$$\omega = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_h^2}$$

是常数；角速度矢端在主轴系水平面中的投影（模长是 ω_h ），以圆频率 Ω 作圆周运动。

（2） 求解运动学方程

注意到惯性系中角动量守恒，取之为惯性系的z轴方向。

这时在随体坐标系中的角动量分量为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} &= R^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\cos \theta \cos \psi \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \cos \theta \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J \sin \theta \sin \psi \\ J \sin \theta \cos \psi \\ J \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是

$$0 = I_3 \dot{\omega}_3 = \dot{J}_3 = J \frac{d}{dt} \cos \theta \Rightarrow \theta(t) = \theta_0$$

即章动角不变，只有进动角和自转角在变化，称之为**规则进动**。

将

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) \\ \omega_3 = \cos \theta_0 \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

代入 Euler 运动学方程，

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) = \sin \theta_0 \sin \psi \dot{\phi} \\ \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) = \sin \theta_0 \cos \psi \dot{\phi} \\ \omega_3 = \cos \theta_0 \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

前两式相除得

$$\psi(t) = \frac{\pi}{2} - (\Omega t + \alpha) \equiv -\Omega t + \psi_0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \psi_0$$

再代入第三式解出 $\dot{\phi}$ ，对时间积分，

$$\phi(t) = \frac{\omega_3 + \Omega}{\cos \theta_0} t + \phi_0$$

到这里为止，解出的欧拉角表达式中独立积分常数为 $\{\theta_0, \psi_0, \phi_0, \omega_3\}$ 。

(3) 积分常数之间的关系

把解代入角动量表达式，

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \sin \theta \sin \psi \\ J \sin \theta \cos \psi \\ J \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \sin \theta_0 \sin(-\Omega t + \psi_0) \\ J \sin \theta_0 \cos(-\Omega t + \psi_0) \\ J \cos \theta_0 \end{pmatrix}$$

而在主轴系，同时有

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_1 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_h \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0\right) \\ I_1 \omega_h \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0\right) \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} J \sin \theta_0 \sin(-\Omega t + \psi_0) \\ J \sin \theta_0 \cos(-\Omega t + \psi_0) \\ J \cos \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_h \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0\right) \\ I_1 \omega_h \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0\right) \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

得关系式

$$\omega_h = \frac{J \sin \theta_0}{I_1}, \quad \omega_3 = \frac{J \cos \theta_0}{I_3}$$

于是有

$$\omega = \sqrt{\omega_h^2 + \omega_3^2} = J \left\{ \left(\frac{\sin \theta_0}{I_1} \right)^2 + \left(\frac{\cos \theta_0}{I_3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} J \cos \theta_0$$

$$\frac{\omega_3 + \Omega}{\cos \theta_0} = \frac{1}{\cos \theta_0} \left\{ \frac{J \cos \theta_0}{I_3} + \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} J \cos \theta_0 \right\} = J \left\{ \frac{1}{I_3} + \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} \right\} = \frac{J}{I_1}$$

可以在结果中只保留 $\{\theta_0, \psi_0, \phi_0, J\}$ 这几个独立积分常数,

$$\begin{cases} \phi = \frac{J}{I_1} t + \phi_0 \\ \theta = \theta_0 \\ \psi = -\frac{(I_3 - I_1)J \cos \theta_0}{I_1 I_3} t + \psi_0 \end{cases}$$

(4) 在随体系观察

在主轴系, 进动角速度为

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} J \cos \theta_0$$

主轴系的角速度、角动量分量, 以及动能、转动惯量为

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{J \sin \theta_0}{I_1} \cos \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) \\ \omega_2 = \frac{J \sin \theta_0}{I_1} \sin \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) \\ \omega_3 = \frac{J \cos \theta_0}{I_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 = J \sin \theta_0 \cos \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) \\ J_2 = J \sin \theta_0 \sin \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) \\ J_3 = J \cos \theta_0 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_1 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{J^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{I_1} + \frac{\cos^2 \theta_0}{I_3} \right)$$

$$I = \frac{2T}{\omega^2} = I_1 I_3 \frac{I_3 \sin^2 \theta_0 + I_1 \cos^2 \theta_0}{I_3^2 \sin^2 \theta_0 + I_1^2 \cos^2 \theta_0} = I_1 I_3 \frac{I_1 + I_3 + (I_1 - I_3) \cos 2\theta_0}{I_1^2 + I_3^2 + (I_1^2 - I_3^2) \cos 2\theta_0}$$

(5) 在惯性系观察

在惯性系的角速度模长与随体系相同, 分量为

$$\begin{cases} \omega_x = \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_y = \sin \phi \dot{\theta} - \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_z = \dot{\phi} + \cos \theta \dot{\psi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_x = \frac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3} J \sin 2\theta_0 \cos \left(\frac{J}{I_1} t + \phi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \omega_y = \frac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3} J \sin 2\theta_0 \sin \left(\frac{J}{I_1} t + \phi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \\ \omega_z = \frac{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3) \cos 2\theta_0}{2I_1 I_3} J \end{cases}$$

惯性系的角动量为

$$\begin{cases} J_x = 0 \\ J_y = 0 \\ J_z = J \end{cases}$$

(6) 本体圆锥和空间圆锥

由于定义角动量方向为惯性系的 z -轴, $J > 0$, 角速度在惯性系与 z -轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega_z} = \frac{(I_3 - I_1) \sin 2\theta_0}{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3) \cos 2\theta_0}$$

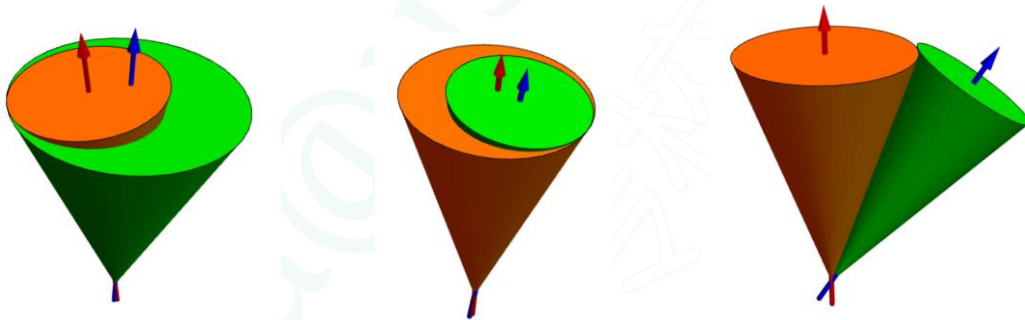
不变, 瞬轴 (见第 (5) 小节惯性系 $\bar{\omega}$ 的表达式) 和第 3 主轴 (见第 (3) 小节 ϕ 的表达式) 以**进动角速度** J/I_1 绕 z -轴逆时针旋转。瞬轴在空间扫过一个锥面 (参看第 2 3 节欧拉角定义的图), 称为**空间锥面**。

在主轴系, 角速度与 3-轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta_0$$

角速度绕 3-轴以圆频率 Ω 旋转 (见 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的表达式), 在主轴系扫过的轨迹称为**本体锥面**。角动量 (即惯性系 z -轴) 与 3-轴的夹角为 θ_0 , 同样以圆频率 Ω 旋转 (见 J_1, J_2, J_3 的表达式)。

定点转动的瞬轴上各点速度为零, 所以本体锥面 (下图, 绿色) 在空间锥面 (橙色) 上作**无滑滚动**。



红色箭头是角动量方向, 蓝色箭头是第三主轴。

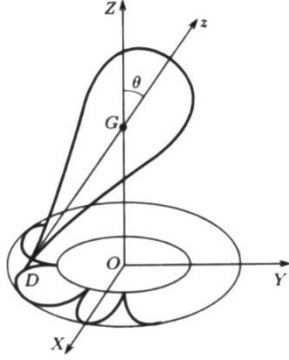
思考:

1. 本体锥面在空间锥面内部还是外部, 两者的转动方向相同还是相反, 各需满足什么条件? (提示: 考虑第三主轴、角动量和角速度的关系)
2. 不动平面距离固定点的距离是多少? 惯量椭球在不动平面上滚动的轨迹是什么形状?

六、LAGRANGE 陀螺

1. 对称重陀螺的拉氏量

对称重陀螺又称拉格朗日陀螺，作定点³转动，有重力作用；主轴惯量 $I_1 = I_2$ ，质心在第三轴上，到固定点距离为 l 。



对称陀螺绕第 3 轴旋转，拉氏量不变，所以是对称变换；绕惯性系 z 轴的旋转，也是对称变换。由诺特定理，有对应的两个守恒量。如果取这两种变换的参数自转角 ψ 和进动角 ϕ 作为广义坐标，则这两个坐标都是循环坐标。这是采用欧拉角参数的好处。

利用欧拉运动学方程写出动能，可得拉格朗日函数，

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - V \\ &= \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta \end{aligned}$$

此时不能像自由刚体那样，动力学方程、运动学方程分开求解。

2. 等效拉氏量

系统有 3 个显见的首次积分，

i. 拉氏量不含 ψ ， p_ψ 守恒，

$$p_\psi = I_3 (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) = I_3 \omega_3 = J_3$$

ii. 拉氏量不含 ϕ ， p_ϕ 守恒，

$$p_\phi = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \cos \theta = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta = J_z$$

iii. 拉氏量不含时，机械能守恒，

$$\frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta = E$$

由前两个守恒量可解出

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} = \frac{J_3}{I_3} - \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \end{cases}$$

系统的广义能量是

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta + \frac{J_3^2}{2I_3}$$

记等效势能为

³ 定点是陀螺足。这节的讨论也适用于一个玩具陀螺在光滑地面上的运动。分离质心的水平运动之后，描述玩具陀螺姿态（欧拉角）的拉氏量以及运动方程，与定点转动陀螺完全一致。

$$V_{\text{eff}}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta + \frac{J_3^2}{2I_3}$$

等效势能在 $\theta = 0, \pi$ 处为正无穷。

由广义能量的表达式知，重陀螺章动的等效拉氏函数是

$$L_{\text{eff}}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}(\theta)$$

3. 求解

系统不含时，等效广义能量守恒，

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E$$

令

$$u = \cos \theta \Rightarrow \dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \dot{u}^2 = \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta + \frac{J_3^2}{2I_3} &= E \\ \Rightarrow \dot{u}^2 &= \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_3} - \frac{2mgl}{I_1} u \right) (1 - u^2) - \frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2} \end{aligned}$$

利用此方程解出 $\dot{u}$ ，积分可求得 $\theta(t)$ ；代回可得 ϕ, ψ 表达式，再次积分可得所有欧拉角。

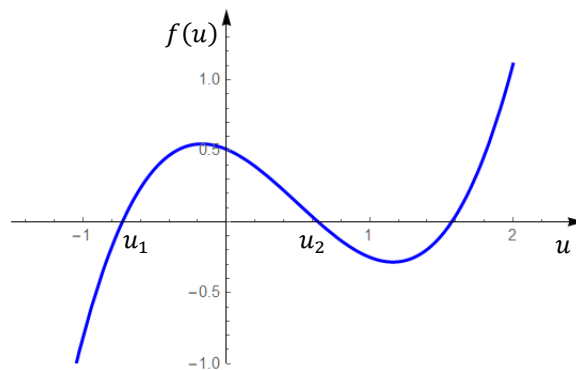
解析结果为椭圆积分，过于复杂，无助于理解其物理意义，这里略去。

4. 章动角的范围

$\dot{u} = 0$ 处，章动角取得极值，

$$\dot{u}^2 = f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1} u \right) (1 - u^2) - \frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2} = 0$$

这是三次多项式，有三个根。



$u \rightarrow +\infty$ 时 $f(u) \rightarrow +\infty$ ，且 $f(1) < 0$ ，必有一根大于 1，舍弃。

考虑不是稳定进动的情形，

$$\dot{\theta} \neq 0 \Leftrightarrow \dot{u} \neq 0$$

则必有角速度大于零的点，即

$$\exists u_0 \in (-1, 1), \dot{u}^2(u_0) > 0 \Rightarrow f(u_0) > 0$$

又由于最大角度 $\theta = \pi$ 处必有 $f(-1) < 0$ （直立陀螺除外），由中值定理，方程在 $(-1, 1)$ 区间有且只有两根（不是重根），分别是章动角的最大值和最小值。

思考：稳定进动时，方程 $f(u) = 0$ 有重根，这对积分常数有什么要求？求这时的进动角速度。

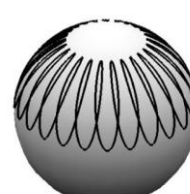
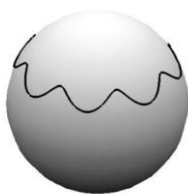
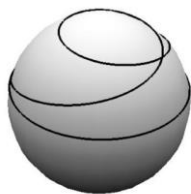
5. 第 3 主轴的轨迹

按欧拉角的定义，第 3 主轴的纬度 θ 、经度为 ϕ ，因此

$$\dot{\phi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} = a(\theta)$$

是第三主轴的进动角速度，考虑章动范围 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ，

- (1) $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2], \dot{\phi} = a(\theta) \neq 0$ 时，第 3 轴向同一方向不折回地进动（前两张图）；
- (2) $a(\theta_1) = 0 | a(\theta_2) = 0$ ，第 3 轴轨迹是带尖点的曲线（第三张图，例如释放倾斜且自转的陀螺就是如此）；
- (3) $\exists \theta \in (\theta_1, \theta_2), a(\theta) = 0$ ，则轨迹为带圈的曲线（第四张图）。



6. 睡陀螺

如果开始时陀螺直立旋转， $J_z = J_3$ 守恒。

考虑等效拉氏量，对等效势能在 $\theta \approx 0$ 附近作泰勒展开，可以求得作微振动的条件。

在摩擦力的耗散作用下，拉格朗日陀螺 $\rightarrow$ 睡陀螺 $\rightarrow$ 失稳。

7. 回转仪*

对称快陀螺又称回转仪，其转动动能远大于重力势能，

$$\frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \gg mgl$$

且 I_3/I_1 不是小量。

若忽略势能，快陀螺就是对称欧拉陀螺。利用等效势能表达式，可以求出其微振动频率。

考虑一个特殊的初始条件——快速抛出的快陀螺：捏住陀螺的对称轴，使陀螺高速自转，然后释放陀螺。

$$\dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) \neq 0$$

这是前小节第三轴轨迹为带尖点曲线的情形，

推论 1

$$\theta(0) = \theta_1$$

是章动角的最小值。

在最大章动角 θ_2 和最小章动角 θ_1 处， $\dot{\theta} = 0$ 。记 $u_1 = \cos \theta_1, u_2 = \cos \theta_2$,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1} u_2 \right) (1 - u_2^2) - \frac{(J_z - J_3 u_2)^2}{I_1^2} = 0 \\ \frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} = \frac{2mgl}{I_1} u_1, \quad J_z = J_3 \cos \theta_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{2I_1 mgl}{J_3^2} (1 - u_2^2) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} p = \frac{J_3^2}{2I_1 mgl} = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1 mgl} \gg 1 \\ \Rightarrow u_2^2 - pu_2 + pu_1 - 1 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4pu_1 + 4}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4pu_1 + 4}}{2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} u_2 < 1 \\ p \gg 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_2 \approx u_1 - \frac{1}{p} (1 - u_1^2) - \frac{2}{p^2} u_1 (1 - u_1^2) + \mathcal{O}(p^{-3})$$

推论 2 初始时转速越快，章动范围越小。

由于快陀螺的章动角变化范围很小，记 $w = u_1 - u$,

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1} u \right) (1 - u^2) - \frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} = \frac{2mgl}{I_1} u_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{w}^2 = \frac{2mgl}{I_1} w \{1 - (u_1 - w)^2\} - \frac{J_3^2}{I_1^2} w^2 = \frac{2mgl}{I_1} \{-w^3 + 2u_1 w^2 + (1 - u_1^2)w\} - \frac{J_3^2}{I_1^2} w^2$$

$$\dot{w}^2 = \frac{2mgl}{I_1} (1 - u_1^2)w - \frac{J_3^2}{I_1^2} w^2 + \mathcal{O}(p^{-2})$$

$$\ddot{w} = \frac{mgl}{I_1}(1 - u_1^2) - \frac{J_3^2}{I_1^2}w$$

$$w(t) = \frac{mglI_1}{J_3^2}(1 - u_1^2)\left\{1 - \cos\left(\frac{J_3}{I_1}t\right)\right\}$$

$$u(t) = u_1 - \frac{mglI_1}{J_3^2}(1 - u_1^2)\left\{1 - \cos\left(\frac{J_3}{I_1}t\right)\right\}$$

推论 3 章动角 $\theta(t)$ 随时间按三角函数震荡。

进动角速度为

$$\dot{\phi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \xrightarrow{J_z = J_3 \cos \theta_1} \dot{\phi} = \frac{J_3 \cos \theta_1 - \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} = \frac{J_3}{I_1} \frac{w}{1 - (u_1 - w)^2}$$

取平均,

$$\langle \dot{\phi} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi} dt \approx \frac{J_3}{I_1(1 - u_1^2)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{J_3}{I_1} \frac{mglI_1}{J_3^2} = \frac{mgl}{I_3 \omega_3}$$

推论 4 初速越快, 进动越慢。

8. 拉莫进动

原子核外电子沿封闭轨道运动, 在外磁场中有势能

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B \cos \theta$$

原子磁矩势能与对称重陀螺势能的表达式形式相同, 相当于快陀螺, 所以进动角速度是

$$\frac{mgl}{J_3} \rightarrow \frac{\mu B}{J_3} = \frac{ef\pi a^2 B}{m\omega a^2} = \frac{eB}{2m}$$

这与上一章的计算结果相同。

七、柯瓦列夫斯卡娅 (KOWALEWSKAJA) 解

$I_1 = I_2 = 2I_3$, 有重力, 质心在赤道面内。实用场景受限, 略。

法兰西科学院 1888 年有奖征解。

俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅

Софья Васильевна Ковалевская

1850.1.15—1891.2.10



八、 非惯性参考系中的运动

1. 质点在非惯性系中的拉氏量和哈密顿量

已知刚体（非惯性参考系）的运动。

一个相对于刚体运动的质点 P ，其位移可以分解为

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{OC} + \vec{r}_{CP} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_P}{dt} - \frac{d\vec{r}_{OC}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CP}}{dt}$$

记 $\vec{r}_0(t) \triangleq \vec{r}_{OC}(t)$ 是参考点的位移， $\vec{r}(t) \triangleq \vec{r}_{CP}(t)$ 是质点相对于非惯性参考系的位移。那么在惯性系，有

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v} \triangleq \frac{d\vec{r}_P}{dt}, \quad \vec{v}_0 \triangleq \frac{d\vec{r}_{OC}}{dt}$$

利用相对微商，在非惯性系（转动参考系，随体系），

$$\vec{v}' - \vec{v}'_0 = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

这节下文去掉符号“'”以简化符号。上式即，质点相对于惯性系的速度，在非惯性系的分量是

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0$$

所以质点运动的拉氏量是

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V(t, \vec{r}) = \frac{1}{2} m \{ (\vec{v} - \vec{v}_0) + \vec{v}_0 \}^2 - V(t, \vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m} \{ (\vec{v} - \vec{v}_0)^2 + 2(\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_0 + \vec{v}_0^2 \} - V(t, \vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m} \{ (\vec{v} - \vec{v}_0)^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{v}_0 - \vec{v}_0^2 \} - V(t, \vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \left\{ \left(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right)^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a}_0 + 2 \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{v}_0) - \vec{v}_0^2 \right\} - V(t, \vec{r}) \end{aligned}$$

其中 $\vec{r}_0(t), \vec{v}_0(t)$ 是已知函数。舍弃拉氏量的规范项，拉氏函数可以等价地写成

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \left\{ \left(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right)^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a}_0 \right\} - V(t, \vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + m \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - m \vec{r} \cdot \vec{a}_0 - V(t, \vec{r}) \end{aligned}$$

其中 $\vec{\omega}(t), \vec{a}_0(t)$ 也是已知函数。

作勒让德变换得哈密顿量，

$$\vec{p} = m \dot{\vec{r}} + m(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + m \vec{r} \cdot \vec{a}_0 + V(t, \vec{r}) \\
&= \frac{1}{2m} \{ \vec{p} - m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \}^2 - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + m \vec{r} \cdot \vec{a}_0 + V(t, \vec{r}) \\
&= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{p} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + m \vec{r} \cdot \vec{a}_0 + V(t, \vec{r})
\end{aligned}$$

上式第二项是科里奥利力的广义势函数，第三项为离心势能（centrifugal potential energy）。

练习：根据这里的拉氏函数、哈密顿函数，写出拉氏方程、哈密顿方程。

2. 在地面参考系的运动

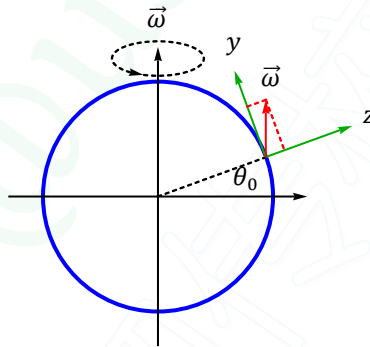
对于地表运动， $\vec{a}_0$ 只与所在地点有关，可归入当地重力加速度之中；地球自转角速度

$$\omega_0 = 7.27221 \times 10^{-5} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

为小量，其平方项可以忽略。再忽略地球的公转加速度项，

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + m \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - m \vec{r} \cdot \vec{a}_0 - V(t, \vec{r}) \approx \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + m \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - V(t, \vec{r})$$

$$H = \frac{1}{2m} \{ \vec{p} - m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \}^2 - \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + m \vec{r} \cdot \vec{a}_0 + V(t, \vec{r}) \approx \frac{1}{2m} \{ \vec{p} - m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \}^2 + V(t, \vec{r})$$



一般我们取地表向东方向为 x 轴正向，地表向北为 y 轴，垂直地表向上为 z 轴（ENU 坐标）。地球自转角速度为

$$\vec{\omega} = (0, \omega_0 \cos \theta_0, \omega_0 \sin \theta_0)$$

其中 θ_0 是坐标原点（参考点）附近的纬度。

如果只有重力场，

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + m \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - mgz$$

$$H = \frac{1}{2m} \{ \vec{p} - m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \}^2 + mgz$$

3. 应用

例 落体偏东

取 ENU 坐标, 以东、北、上为三个坐标轴的方向。由于 $\partial L / \partial t = 0$, 可用莫培督原理求轨道。

先用等能约束条件消去时间参数,

$$\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + mgz = E \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2(E - mgz)}} |d\vec{r}|$$

约化作用量成为

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \vec{p} \cdot d\vec{r} &= \int_{z_1}^{z_2} m(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \sqrt{2m(E - mgz)} |d\vec{r}| + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} \right\} \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \sqrt{2m(E - mgz)} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{r}' \right\} dz \end{aligned}$$

上式中,

$$x' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx}{dz}, \quad y' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dz}$$

我们讨论静止物体从高处下落的情形。在运动过程中 ω_0 和 $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ 均为小量, 只需保留到二阶,

$$\int_{z_1}^{z_2} \vec{p} \cdot d\vec{r} \approx \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \sqrt{2m(E - mgz)} \left(1 + \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) + m\omega_0 \cos \theta_0 (zx' - x) \right\} dz$$

舍弃规范项, 约化作用量为

$$W[x, y] = \int_{z_1}^{z_2} \vec{p} \cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{2m(E - mgz)} (x'^2 + y'^2) + m\omega_0 \cos \theta_0 (zx' - x) \right\} dz$$

利用拉格朗日框架下的莫培督原理, 真实轨迹满足拉氏方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left\{ \sqrt{2m(E - mgz)} x' + m\omega_0 \cos \theta_0 z \right\} = -m\omega_0 \cos \theta_0 \\ \frac{d}{dz} \sqrt{2m(E - mgz)} y' = 0 \end{cases}$$

设开始时质点静止于坐标原点,

$$x(z=0) = 0, \quad y(z=0) = 0, \quad E = 0$$

对拉氏方程积分得

$$\begin{cases} \sqrt{2(-gz)}x' = -2\omega_0 \cos \theta_0 z \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \omega_0 \cos \theta_0 \sqrt{\frac{-z^3}{g}} \\ y = 0 \end{cases}$$

取合肥的纬度，若一小球落到深 100m 的矿井底部，

$$\theta_0 = 31.8584^\circ, \quad g = 9.7947 \text{ m/s}^2$$

落点偏东

$$\frac{2}{3} \omega_0 \cos \theta_0 \left(\frac{2h^3}{g} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.0186 \text{ m}$$

练习：不计空气阻力，估计炮弹落地偏差。

练习：用相空间的莫培督原理求落体问题的相轨道。

例 傅科摆

仍取 ENU 坐标。设球面摆静止时，质点位于坐标原点。绳长 l ，栓在 $(0,0,l)$ 处，约束方程

$$x^2 + y^2 + (z - l)^2 = l^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2lz$$

体系微振动时 x, y 为小量，由约束方程知 z 为 2 阶小量，

$$z = \frac{1}{2l}(x^2 + y^2)$$

拉氏量只需保留至 2 阶小量；常数 ω_0 更小，只需保留 x, y 的领头阶，舍弃 ω_0^2 项，

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + m \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - mgz \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega_0 \{x(\dot{y} \sin \theta_0 - \dot{z} \cos \theta_0) - \dot{x}(y \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)\} - mgz \\ &\approx \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega_0 \sin \theta_0 (x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{1}{2} \frac{mg}{l} (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

作勒让德变换

$$p_x = m\dot{x} - m\omega_0 \sin \theta_0 y, \quad p_y = m\dot{y} + m\omega_0 \sin \theta_0 x$$

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} (x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2m} \{ (p_x + m\omega_0 \sin \theta_0 y)^2 + (p_y - m\omega_0 \sin \theta_0 x)^2 \} + \frac{1}{2} \frac{mg}{l} (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{l} + \omega_0^2 \sin \theta_0\right)(x^2 + y^2) + \omega_0 \sin \theta_0 (yp_x - xp_y)$$

记

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \quad \omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{l} + \omega_0^2 \sin \theta_0$$

$$H' = \omega_0 \sin \theta_0 (yp_x - xp_y) = -\omega_0 \sin \theta_0 L_z$$

$$H = H_0 + H', \quad [H_0, H'] = 0$$

利用算子

$$\hat{H}_0 \stackrel{\text{def}}{=} [\cdot, H_0(t_0, x(t_0), y(t_0), p_x(t_0), p_y(t_0))]$$

$$\hat{H}' \stackrel{\text{def}}{=} [\cdot, H'(t_0, x(t_0), y(t_0), p_x(t_0), p_y(t_0))]$$

$$\hat{L}_z \stackrel{\text{def}}{=} [\cdot, x(t_0)p_y(t_0) - y(t_0)p_x(t_0)]$$

$$[\vec{r}, \psi \cdot \vec{L}] = (\vec{\psi} \cdot \vec{X})\vec{r} \Rightarrow \exp\{\vec{\psi} \cdot \hat{\vec{L}}\}\vec{r}(t_0) = R(\vec{\psi})\vec{r}(t_0) \text{ (练习)}$$

在 $t = t_0 + \tau$ 时, 坐标演化成为

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp\{\tau \hat{D}\} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \exp\{\tau \hat{H}\} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \exp\{\tau \hat{H}_0\} \exp\{-\omega_0 \sin \theta \tau \hat{L}_z\} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$$

无微扰项时, 平面振子轨迹为椭圆。但由于科里奥利 (Coriolis) 力的影响, 在北半球, 摆平面或椭圆的长短轴以圆频率 $\omega_0 \sin \theta$ 顺时针旋转。在合肥地区, 旋转一圈约需

$$\frac{2\pi}{\omega_0 \sin \theta_0} = 45\text{h}28\text{min}$$

Dept. Mod. Phy.
2025.12.30
Copyright © 2025-12-30

附录 描述刚体运动的其它参数

有 Euler 参数、Cayley-Klein 参数、Hamilton 参数等，这些参数的定义都源于SO(3)群与SU(2)群的同态。

(1) 2 维酉矩阵表示

Pauli 矩阵定义为

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{\sigma_j}{2}$ 之间的对易关系与 $J_j = iX_j$ 之间的对易关系完全相同，

$$\sigma_j \sigma_k \equiv \delta_{jk} \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l$$

$$\left[\frac{\sigma_j}{2}, \frac{\sigma_k}{2} \right] = i \varepsilon_{jkl} \frac{\sigma_l}{2} \leftrightarrow [J_j, J_k] = i \varepsilon_{jkl} J_l$$

因此，由 Baker-Hausdorff 公式， $SO(3) = \{R(\vec{\psi}) = e^{-i\vec{J} \cdot \vec{\psi}}\}$ 与 $SU(2) = \{u(\vec{\psi}) = e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\psi}}\}$ 的乘法规则完全相同（群的同态）。可以用 2 维复矩阵表示转动⁴，

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad aa^* + bb^* = 1$$

$$\begin{aligned} u(\vec{r} \cdot \vec{\tau})u^{-1} &= (R(u)\vec{r}) \cdot \vec{\tau} \\ \Rightarrow R(u) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} - b^2 - b^{*2}) & -\frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) & -(ab + a^*b^*) \\ \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} - b^2 + b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}) & i(a^*b^* - ab) \\ a^*b + ab^* & i(a^*b - ab^*) & aa^* - bb^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) EULER 参数

又由于

$$\begin{aligned} u(\vec{\psi}) &= e^{-i\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{\psi}} = \cos \frac{\psi}{2} \mathbf{1}_{2 \times 2} - i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin \frac{\psi}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} - in_3 \sin \frac{\psi}{2} & (-in_1 - n_2) \sin \frac{\psi}{2} \\ (-in_1 + n_2) \sin \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} + in_3 \sin \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以可引进 Euler 参数（Goldstein 3ed., p155）

$$e_0 = \cos \frac{\psi}{2}, \quad e_j = -n_j \sin \frac{\psi}{2}, \quad e_0^2 + \vec{e}^2 = 1,$$

⁴ 设 $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 。 $\det u = 1 \Rightarrow ad - bc = 1$; $u^\dagger u = \mathbf{1} \Rightarrow ab^* + cd^* = 0, |a|^2 + |c|^2 = 1, |b|^2 + |d|^2 = 1$. $0 = d(ab^* + cd^*) = (1 + bc)b^* + c|d|^2 = b^* + c(|b|^2 + |d|^2) = b^* + c \Rightarrow c = -b^*$. $0 = b(ab^* + cd^*) = a|b|^2 + (ad - 1)d^* = a(|b|^2 + |d|^2) - d^* = a - d^* \Rightarrow d = a^*$.

$$u = \begin{pmatrix} e_0 + ie_3 & e_2 + ie_1 \\ -e_2 + ie_1 & e_0 - ie_3 \end{pmatrix}$$

对应的转动矩阵为

$$R(e_0, e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}$$

(3) CAYLEY-KLEIN 参数

(Goldstein 3ed. P155)

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad u \in SU(2) \Leftrightarrow \delta = \alpha^*, \gamma = -\beta^*, \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

转动矩阵为

$$R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2) & -\frac{i}{2}(\alpha^2 - \delta^2 + \beta^2 - \gamma^2) & -\alpha\beta + \gamma\delta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 - \delta^2 - \beta^2 + \gamma^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \delta^2 + \beta^2 + \gamma^2) & -i(\gamma\delta + \alpha\beta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\beta\delta + \alpha\gamma) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{pmatrix}$$

(4) 四元数

Hamilton 参数即把 Pauli 矩阵对应到四元数,

$$q \stackrel{\text{def}}{=} q_0 + q_1\mathbf{i}_1 + q_2\mathbf{i}_2 + q_3\mathbf{i}_3$$

四元数的乘法规则

$$\mathbf{i}_j\mathbf{i}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl}\mathbf{i}_l$$

与 Pauli 矩阵的乘法规则比较

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

知 $\mathbf{i}_j \Leftrightarrow -i\sigma_j$, 所以

$$q \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad a = q_0 - q_3i, \quad b = -q_2 - q_1i$$

$$u(\vec{\psi}) = \cos \frac{\psi}{2} \mathbf{1}_{2 \times 2} - i(\vec{\tau} \cdot \vec{n}) \sin \frac{\psi}{2} \Rightarrow q_0 = \cos \frac{\psi}{2}, q_j = -n_j \sin \frac{\psi}{2}, |q|^2 = 1$$

即 3 维空间的转动与单位模长的四元数对应, 连续转动对应四元数的乘法。

转动矩阵与四元数的关系为

$$R(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$