

第 5 章 微振动

振动理论是分析力学的一个重要应用。英国物理学家瑞利¹对振动理论有开创性的贡献，包括线性振动的一般理论、模态近似计算方法和摄动方法等。

一、微振动系统的拉氏函数

保守自治系统的拉氏函数为

$$L = T - V \quad (5.1)$$

$$V = V(q), \quad T = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (5.2)$$

势函数在稳定平衡位置处满足

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right|_{q=q_0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

如果系统在平衡位置 $q_\alpha = q_{0\alpha}$ 附近运动时的位移很小，也就是作微振动（small oscillations），那么可以将 $V(q)$ 在平衡点附近作级数展开，

$$V(\eta) = V(q_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right|_{q=q_0} \eta_\alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q=q_0} \eta_\alpha \eta_\beta + \mathcal{O}(\eta^3) \quad (5.4)$$

其中微振动坐标 η 定义为

$$\eta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} q_\alpha - q_{0\alpha} \quad (5.5)$$

把平衡条件代入，并取势能零点 $V(q_0)$ 为 0，舍去高阶小量²，只保留领头项，那么势函数可以近似为二次型（简谐近似 harmonic approximation），

$$V(\eta) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q=q_0} \eta_\alpha \eta_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta = \frac{1}{2} \vec{\eta}^T K \vec{\eta} \quad (5.6)$$

上式中的

$$K_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q=q_0} \quad (5.7)$$

称为刚度矩阵。由于 q_0 是稳定平衡点，故而 $V(\eta)$ 是正定二次型，刚度矩阵是实对称正定矩阵。

在动能项中，速度可以看成是和位移同阶的小量。展开动能到二阶小量时，系数 $T_{\alpha\beta}$ 只需要保留到零阶项，

$$T = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \approx \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}(q_0) \dot{\eta}_\alpha \dot{\eta}_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\alpha \dot{\eta}_\beta = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^T M \dot{\vec{\eta}} \quad (5.8)$$

上式中的常数矩阵仍然记为 $M_{\alpha\beta}$

$$M_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} M_{\alpha\beta}(q_0) \quad (5.9)$$

称为惯性矩阵。动能正定，因此惯性矩阵也是正定实对称矩阵。

引进微振动坐标后，微振动系统的拉氏函数近似为

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^T M \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^T K \vec{\eta} \quad (5.10)$$

运动方程是

$$M_{\alpha\beta} \ddot{\eta}_\beta + K_{\alpha\beta} \eta_\beta = 0 \quad (5.11)$$

写成矩阵形式，

$$M \ddot{\vec{\eta}} + K \vec{\eta} = \vec{0} \quad (5.12)$$

¹ Lord Rayleigh, 1842—1919 年，本名 John William Strutt。

² 少数情况下会遇到 2 次项=0 的情形，此时由稳定平衡条件，3 次项也为 0，势能是位移的 4 次项。这里不讨论这种非谐效应（anharmonicity）。

二、 模态分析

1. 简正坐标

我们希望通过线性变换

$$\vec{\eta}(t) \stackrel{\text{def}}{=} A\vec{\xi}(t) \quad (5.13)$$

把拉氏量简化成解耦的形式,

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\xi}}^T \dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2} \vec{\xi}^T \Omega \vec{\xi} = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \dot{\xi}_j^2 - \frac{1}{2} \omega_j^2 \xi_j^2 \right\} \quad (5.14)$$

其中 Ω 是对角矩阵, 且对角元 ω_j^2 是正数; $\{\xi_j | j = 1, 2, \dots, n\}$ 称为简正坐标 (normal coordinates)。

2. 简正坐标的存在性

实对称矩阵的合同变换规范形是对角阵, 且对角元只能是 ± 1 或 0 (Sylvester 惯性定理)。

我们可以先利用合同变换把 M 化为单位矩阵, 变换后的 K 仍然是对称矩阵; 然后再作正交变换把 K 对角化, 同时惯性矩阵仍保持为单位阵, 达到同时对角化两个矩阵的目的。这表明简正坐标一定存在。

3. 自然频率

在简正坐标下, 运动方程已分离变量,

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.15)$$

方程的解是简谐振荡,

$$\xi_j(t) = c_j \cos(\omega_j t - \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.16)$$

这里的 ω_j 是系统的自然频率 (nature frequency)。

4. 对角化

我们希望只作一次线性变换, 就直接解决惯性矩阵和刚度矩阵的对角化问题。

把 $\vec{\eta}(t) = A\vec{\xi}(t)$ 代入拉氏函数(5.10), 与(5.14)对比,

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{\xi}}^T A^T M A \dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2} \vec{\xi}^T A^T K A \vec{\xi} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\xi}}^T \dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2} \vec{\xi}^T \Omega \vec{\xi} \quad (5.17)$$

可见矩阵 A 必须满足方程

$$A^T M A = I, \quad A^T K A = \Omega \quad (5.18)$$

其中

$$\Omega = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2\} \quad (5.19)$$

是对角矩阵。

矩阵 A 必为非奇异矩阵,

$$\det(A^T M A) = (\det A)^2 \det M = 1 \implies \det A \neq 0 \quad (5.20)$$

将两个矩阵方程

$$I = A^T M A, \quad A^T K A = \Omega \quad (5.21)$$

的左右两边分别相乘, 得

$$A^T K A = A^T M A \Omega \quad (5.22)$$

两边同时左乘 $(A^T)^{-1}$,

$$K A = M A \Omega \quad (5.23)$$

5. 广义特征方程的解

我们把矩阵 A 看成由 n 个线性无关的列矢量并列而成,

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \quad (5.24)$$

则有

$$K(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = M(\omega_1^2 \vec{a}_1, \omega_2^2 \vec{a}_2, \dots, \omega_n^2 \vec{a}_n) \quad (5.25)$$

即每个列矢量都满足广义特征方程,

$$K \vec{a}_j = \omega_j^2 M \vec{a}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.26)$$

根据上面的方程, 特征值 ω_j^2 应该是特征多项式

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (5.27)$$

的 n 个根,

$$\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2. \quad (5.28)$$

6. 模态分析的步骤

根据以上分析，求模态矩阵 A 的步骤是：

- (1) 先求出特征多项式的根 $\{\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2\}$ 。
- (2) 再利用广义特征方程分别求出相应的特征矢 $\vec{a}_j$ 。
- (3) 然后以惯性矩阵作为度规，对特征矢归一化，使之满足

$$\vec{a}_j^T M \vec{a}_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.29)$$

如果特征多项式有重根，例如 $\omega_j^2 = \omega_k^2$ ，我们可以按内积

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T M \vec{y} \quad (5.30)$$

作施密特正交化，得到正交归一的特征矢。

- (4) 最后并列特征矢，得矩阵 A 。

7. 广义特征矢的物理意义

我们来看矩阵 A 的物理意义。

系统以单一频率作简谐振动的运动模式，称为**简正模式**（normal modes）。这时微振动坐标是

$$\vec{\eta}(t) = \vec{a} \cos(\omega t - \varphi) \quad (5.31)$$

代入运动方程得

$$(-\omega^2 M + K)\vec{a} = \vec{0} \quad (5.32)$$

这一齐次方程组有非零解 $\vec{a}$ ，因此系数矩阵必奇异，

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0 \quad (5.33)$$

特征多项式的根

$$\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2 \quad (5.34)$$

就是前面定义的自然频率。

特征值 ω_j^2 对应的特征矢 $\vec{a}_j$ 满足

$$(-\omega_j^2 M + K)\vec{a}_j = \vec{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.35)$$

$\vec{a}_j$ 表示在第 j 个简正模式下，各个微振动坐标的振幅比，故称之为**模态矢量**（modal vectors）。矩阵 A 的每一列，都是一个模态矢量，因此被称为**模态矩阵**（modal matrix）。

按我们前面的论证，模态矩阵是对合变换和正交变换相乘而得，所以矩阵 A 是实矩阵、非奇异。也就是说，

模态矢量 $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ 都是实矢量、彼此线性无关，构成一组正交归一的完备基。

推论 广义特征方程的特征值 $\omega^2 > 0$ 。

证明：把广义特征方程

$$K\vec{a} = \omega^2 M\vec{a} \quad (5.36)$$

的两边同乘以 $\vec{a}^\dagger$ ，

$$\vec{a}^\dagger K \vec{a} = \omega^2 \vec{a}^\dagger M \vec{a} \quad (5.37)$$

角频率可以写成瑞利商（Rayleigh Quotient），

$$\omega^2 = \frac{\vec{a}^\dagger K \vec{a}}{\vec{a}^\dagger M \vec{a}} \quad (5.38)$$

由于瑞利商的分子和分母均为正定二次型，所以 ω^2 恒正。

如果在计算过程中采用了另一种归一化约定，

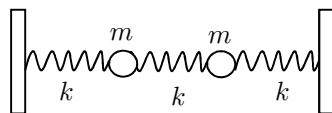
$$(\vec{a}_j^T M \vec{a}_k) = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \quad (5.39)$$

则模式矩阵 A 可将 M, K 同时对角化为

$$A^T M A = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \quad (5.40)$$

$$A^T K A = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\} \quad (5.41)$$

例 三根弹性系数为 k 的弹簧以及两个质量 m 的质点依次相连，两端固定在墙壁上作直线运动。求系统的自然频率和简正模式。



弹簧连接的两个小球

解：①记两个质点的微振动坐标为 η_1, η_2 。动能和势能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) \quad (5.42)$$

$$V = \frac{1}{2}k[\eta_1^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + \eta_2^2] = \frac{1}{2}k(2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2) \quad (5.43)$$

由此读出惯性矩阵和刚度矩阵，

$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

②广义特征值 ω^2 是特征多项式的根，

$$\det\left\{-\omega^2 m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\} = (2k - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0 \quad (5.45)$$

解得两种自然频率，

$$\omega^2 = 3\omega_0^2, \omega_0^2, \quad \omega_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k}{m} \quad (5.46)$$

③把自然频率代入特征方程，解得对应的特征矢，分别为

$$\frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

并列这两个矢量，得到模态矩阵，

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

④简正坐标是

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = A^T M \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_1 + \eta_2 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

第一种简正模式

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow \eta_1 = -\eta_2 \quad (5.50)$$

表示两个质点以相同幅度反向运动。

第二种简正模式是两个质点整体平移，

$$\xi_1 = 0 \Rightarrow \eta_1 = \eta_2 \quad (5.51)$$

两个质点等幅度同向运动。



两种简正模式

⑤简正坐标作简谐振荡，

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_1) \\ c_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

⑥微振动坐标是

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

重新定义积分常数符号，可以写成

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_1) - c_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \\ c_1 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_1) + c_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

例 CO₂分子的振动

三个质量分别为 m, M, m 的质点在一条直线上，通过两根弹性系数为 k 的弹簧（化学键）相连，系统平衡时弹簧的长度为 b 。求纵向振动的简正模式。



线形分子的纵向振动

解：①记三个质点的坐标分别为 x_1, x_2, x_3 。弹性势能是

$$V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - b)^2 \quad (5.55)$$

②引进微振动坐标，

$$\eta_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j - x_{j0} \quad (5.56)$$

其中 x_{j0} 是平衡位置，且有

$$x_{02} - x_{01} = b, \quad x_{03} - x_{02} = b \quad (5.57)$$

势能和动能是

$$V = \frac{k}{2}(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3) \quad (5.58)$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2 \quad (5.59)$$

$$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

③本征频率满足

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0 \quad (5.61)$$

解出

$$\omega^2 = 0, \frac{k}{m}, \frac{k}{mM}(2m + M) \quad (5.62)$$

④对应的模态矢量和模态矩阵是

$$\frac{1}{\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} \begin{pmatrix} M \\ -2m \\ M \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{M}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} \\ \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & 0 & \frac{-2m}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} \\ \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{M}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

⑤第一种模式的频率 $\omega^2 = 0$ ，从运动方程解出

$$\ddot{\xi}_1 = 0 \Rightarrow \xi_1(t) = c_0 + c_1 t \quad (5.65)$$

是质心的匀速直线运动，
简正坐标是

$$\vec{\xi} = A^{-1}\vec{\eta} \quad (5.66)$$

先求出逆矩阵，

$$A^{-1} = A^T M = \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{M+2m}} & \frac{M}{\sqrt{M+2m}} & \frac{m}{\sqrt{M+2m}} \\ \frac{m}{\sqrt{2m}} & 0 & -\frac{m}{\sqrt{2m}} \\ \frac{Mm}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} & \frac{-2mM}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} & \frac{Mm}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{M+2m}}(m\eta_1 + M\eta_2 + m\eta_3) = \sqrt{M+2m}(x_{C0} + v_C t) \\ \xi_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}(\eta_1 - \eta_3) = C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_2\right) \\ \xi_3 = \sqrt{\frac{Mm}{2M+4m}}(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) = C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}t + \varphi_3\right) \end{cases} \quad (5.68)$$

⑥简正模式的意义
第一种模式

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0 \quad (5.69)$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 \quad (5.70)$$

三个原子的位移相等。

第二种模式

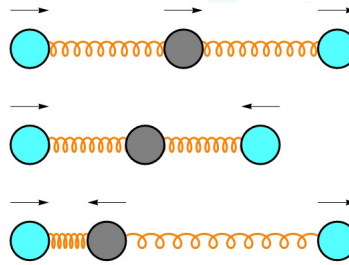
$$\xi_1 = 0, \quad \xi_3 = 0 \quad (5.71)$$

$$\Rightarrow \eta_2 = 0, \quad \eta_1 = -\eta_3 \quad (5.72)$$

第三种模式

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0 \quad (5.73)$$

$$\Rightarrow \eta_1 = \eta_3, \quad \eta_2 = -\frac{2m}{M}\eta_1 \quad (5.74)$$



三种简正模式

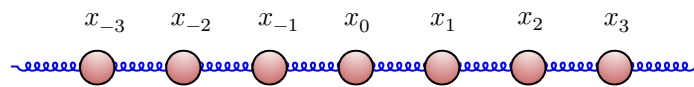
⑦在重定义积分常数后，微振动坐标 $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$ 可简化成

$$\begin{cases} \eta_1(t) = (x_{C0} + v_C t) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_2\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}t + \varphi_3\right) \\ \eta_2(t) = (x_{C0} + v_C t) - \frac{2m}{M}C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}t + \varphi_3\right) \\ \eta_3(t) = (x_{C0} + v_C t) - C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_2\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}t + \varphi_3\right) \end{cases} \quad (5.75)$$

三、晶格的振动

1. 晶格模型

质量为 m 的相同原子，沿直线排列成无限长的晶格，原子之间的平衡距离为 a 。



一维无限长原子链

考虑沿晶格方向的一维运动，对原子之间的相互作用取谐振近似，

$$V = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \beta (x_n - x_{n-1})^2 \quad (5.76)$$

上式中 x_n 表示第 n 个原子的偏移。

系统的拉格朗日函数是

$$\begin{aligned} L = T - V &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \beta (x_n - x_{n-1})^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta (x_n^2 - x_n x_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.77)$$

2. 运动方程

由拉氏函数写出运动方程，

$$m \ddot{x}_n - \beta x_{n-1} + 2\beta x_n - \beta x_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.78)$$

系统的自由度是无穷大，直接用矩阵计算模态不是很方便。

3. 简正模式

设简正模式是

$$x_n(t) = A_n e^{-i\omega t}, \quad A_n \stackrel{\text{def}}{=} |A_n| e^{i\varphi_n} \in \mathbb{C} \quad (5.79)$$

代入运动方程得

$$-m\omega^2 A_n - \beta A_{n-1} + 2\beta A_n - \beta A_{n+1} = 0 \quad (5.80)$$

即

$$A_{n-1} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) A_n + A_{n+1} = 0, \quad \omega_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\beta}{m} \quad (5.81)$$

4. 振幅的通解

记特征方程

$$1 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) \mu + \mu^2 = 0 \quad (5.82)$$

的解为 μ_1, μ_2 ，则数列 A_n 的通解是

$$A_n = \begin{cases} c_1 \mu_1^n + c_2 \mu_2^n, & \mu_1 \neq \mu_2 \\ c_1 \mu_1^n + c_2 n \mu_1^n, & \mu_1 = \mu_2 \end{cases} \quad (5.83)$$

下面先讨论非简并的情况。

当振幅满足

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |A_n| = \infty \quad (5.84)$$

时，系统的局部能量可以趋于无穷大。为了避免这样的非物理振动模式，必须取

$$|\mu_j| = 1 \quad (5.85)$$

$$\mu_1 = \mu_2^* = e^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi) \quad (5.86)$$

代入式(48)得复振幅是

$$A_n = c_1 e^{in\theta} + c_2 e^{-in\theta} \quad (5.87)$$

A_n 中的两项，各自都是递推公式的解，且对应的角频率 ω 相同，为 2 重简并。

5. 自然频率

把(5.87)式的两项，分别代入特征方程(5.82)，

$$1 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 0 \quad (5.88)$$

$$1 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) e^{-i\theta} + e^{-2i\theta} = 0 \quad (5.89)$$

上面的两个方程相同，解出的圆频率都是

$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 - 2 \cos \theta) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \in [0, 4\omega_0^2] \quad (5.90)$$

6. 波矢量

x_n 中的相因子 $e^{in\theta}$ ，源于机械波在晶格中传播。对于连续介质，这个相因子是 e^{ikx} 。引进角波数 k ，

$$k := \frac{\theta}{a}, \quad k \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) \quad (5.91)$$

$$e^{i\theta} = e^{ika} \quad (5.92)$$

$$\mu_1 = \mu_2^* = e^{i\theta} = e^{ika} \quad (5.93)$$

代入(52)式，得复振幅是

$$A_n = c_1 e^{inka} + c_2 e^{-inka} \quad (5.94)$$

在平面晶格或三维晶格中，波的传播有方向，平面波的相位是

$$-i\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (5.95)$$

$\vec{k}$ 称为波矢量 (wave vector)。波矢量的模长称为角波数，波矢量的取值区间称为布里渊区 (Brillouin zone)。

7. 色散关系

波矢量与圆频率的关系称为色散关系。从(5.90)式得

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \in [0, 2\omega_0] \quad (5.96)$$

8. 相速度和群速度

格波的相速度和群速度分别是

$$v_p = \frac{\omega}{|k|} = \omega_0 a \operatorname{sinc} \frac{ka}{2} \quad (5.97)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \omega_0 a \cos \frac{ka}{2} \quad (5.98)$$

在布里渊区的边界处，

$$k = \pm \frac{\pi}{a} \quad (5.99)$$

于是群速为零，

$$v_g = 0 \quad (5.100)$$

代入(5.87)式，得到各原子振幅大小相同，

$$A_n = (c_1 + c_2)(-1)^n = \begin{cases} A_0, & n \text{ 是偶数;} \\ -A_0, & n \text{ 是奇数.} \end{cases} \quad (5.101)$$

是驻波。

9. 低频极限

在低频极限，色散关系近似为线性，

$$\omega = \omega_0 |k| a \quad (5.102)$$

相速度与群速度相等，

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{d\omega}{dk} = v_g = \pm \omega_0 a \quad (5.103)$$

速度是常数（从而折射率是常数），没有色散。

10. 用波矢表示的复振幅

在简正模式下，各个原子的复振幅是

$$A_n = \gamma(k) e^{in\theta} = \gamma(k) e^{inka}, \quad \gamma \in \mathbb{C} \quad (5.104)$$

一维原子链有无穷多种简正模式。

11. 微振动坐标的通解

微振动坐标的通解，是各模式的线性叠加，

$$x_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \gamma(k) e^{-i\omega t} e^{in\theta} d\theta = \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \gamma(k) e^{-i(\omega t - nka)} dk \quad (5.105)$$

上式是傅里叶变换。

12. 傅里叶变换和逆变换

如果

$$f(\theta) \in L^2[-\pi, \pi] \quad (5.106)$$

是平方可积函数，那么可以展开为傅里叶级数（Fourier Series）：

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (5.107)$$

展开系数 c_n 满足帕塞瓦尔（Marc-Antoine Parseval）恒等式，

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \quad (5.108)$$

13. 简正坐标

把微振动坐标 $x_n(t)$ 看成傅里叶级数的系数 c_n ，

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} \xi(\theta, t) \right] e^{in\theta} d\theta \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} \xi(k, t) \right] e^{inka} dk \end{aligned} \quad (5.109)$$

上式中的 $\xi(k, t)$ 是简正坐标，

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \xi(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n(t) e^{-in\theta} \quad (5.110)$$

$$\xi(k, t) = \sqrt{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n(t) e^{-inka} \quad (5.111)$$

广义速度服从同样的正反变换关系，

$$\dot{\xi}(k, t) = \sqrt{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{x}_n(t) e^{-inka} \quad (5.112)$$

$$\dot{x}_n(t) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{\sqrt{m}} \dot{\xi}(k, t) e^{inka} dk \quad (5.113)$$

14. 拉氏函数

为了把拉氏函数的变量改为简正坐标，我们利用帕塞瓦尔恒等式得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = \frac{a}{2\pi m} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} |\xi(k, t)|^2 dk \quad (5.114)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\dot{x}_n|^2 = \frac{a}{2\pi m} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} |\dot{\xi}(k, t)|^2 dk \quad (5.115)$$

拉氏函数中的另一项 $\beta x_n x_{n-1}$ ，可以写成

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n x_{n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\sqrt{m}} \xi(\theta_1, t) e^{in\theta_1} d\theta_1 \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\sqrt{m}} \xi(\theta_2, t) e^{i(n-1)\theta_2} d\theta_2 \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_2 \xi(\theta_1, t) \xi(\theta_2, t) e^{-i\theta_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned} \quad (5.116)$$

利用傅里叶变换对 $c_n = 1$ 和 $2\pi\delta(\theta)$ ，

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} 2\pi\delta(\theta) e^{in\theta} d\theta, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} = 2\pi\delta(\theta) \quad (5.117)$$

化简前式，

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n x_{n-1} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2 m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_2 \xi(\theta_1, t) \xi(\theta_2, t) e^{-i\theta_2} 2\pi \delta(\theta_1 + \theta_2) \\
&= \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta_1 \xi(\theta_1, t) \xi(-\theta_1, t) e^{i\theta_1} = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta |\xi(\theta, t)|^2 e^{i\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta |\xi(\theta, t)|^2 \cos \theta = \frac{a}{2\pi m} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} |\xi(k, t)|^2 \cos ka dk
\end{aligned} \tag{5.118}$$

总之，拉氏函数是

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta (x_n^2 - x_n x_{n-1}) \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2} |\dot{\xi}(k, t)|^2 dk - \frac{a}{2\pi} \frac{\beta}{m} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} |\xi(k, t)|^2 dk + \frac{a}{2\pi} \frac{\beta}{m} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} |\xi(k, t)|^2 \cos ka dk \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2} |\dot{\xi}(k, t)|^2 dk - \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \omega_0^2 (1 - \cos ka) |\xi(k, t)|^2 dk \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2} |\dot{\xi}(k, t)|^2 dk - \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2} \omega^2(k) |\xi(k, t)|^2 dk
\end{aligned} \tag{5.119}$$

现在拉氏函数写成了解耦的形式，

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \left\{ \frac{1}{2} |\dot{\xi}(k, t)|^2 - \frac{1}{2} \omega^2(k) |\xi(k, t)|^2 \right\} dk \tag{5.120}$$

每个简正坐标的解都是简谐振荡，在凝聚态物理学中称为**声子**（phonon）。

声子解是

$$\xi(k, t) = c(k) e^{-i\omega(k)t} \tag{5.121}$$

代入(5.72)式得简正坐标，

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{\sqrt{m}} \xi(k, t) e^{inka} dk \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{+\frac{\pi}{a}} \frac{1}{\sqrt{m}} c(k) e^{-i[\omega(k)t - kna]} dk
\end{aligned} \tag{5.122}$$

四、 矩阵解法

1. 矩阵函数简介

用幂级数定义**矩阵函数**，

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} f(0)\mathbf{1} + f^{(1)}(0)A + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} A^2 + \dots \tag{5.123}$$

矩阵函数可以用凯莱-哈密顿定理化简。

定理（Cayley-Hamilton）

对任意方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，有恒等式

$$(A - \lambda_1 \mathbf{1})(A - \lambda_2 \mathbf{1}) \cdots (A - \lambda_n \mathbf{1}) = \mathbf{0} \tag{5.124}$$

其中 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 是矩阵的特征值， $\mathbf{1}$ 是单位矩阵， $\mathbf{0}$ 是零矩阵。

在后面的章节，还需用到以下几个关于矩阵的公式：

① **BCH 公式（Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin formula）**

$$e^A e^B = \exp \left\{ A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} [A - B, [A, B]] + \frac{1}{24} [B, [A, [B, A]]] + \dots \right\} \tag{5.125}$$

公式的指数上是一个李级数，省略的是 5 阶及以上的项。

② 与 BCH 公式相关的是 **Zassenhaus 展开式**，

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^{\frac{1}{3!}(2[B,\{A,B\}]+[A,[A,B]])} e^{-\frac{1}{4!}([[[A,B],A],A]+3[[A,B],A],B]+3[[A,B],B],B)} \dots \quad (5.126)$$

③豪斯多夫 (Hausdorff) 公式

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (5.127)$$

定义矩阵的伴随表示 (adjoint representation)

$$\text{Ad} S \circ B \stackrel{\text{def}}{=} S B S^{-1}, \quad \text{ad} A \circ B \stackrel{\text{def}}{=} [A, B] \quad (5.128)$$

豪斯多夫公式可以写成

$$\text{Ad}(e^A) = e^{\text{ad} A} \quad (5.129)$$

④行列式的恒等式

$$\det e^A = e^{\text{Tr}} \quad (5.130)$$

对有限维矩阵, 这个恒等式可证; 对无穷维矩阵, 这个式子可以作为其行列式的定义。

例 求 2 阶矩阵 A 的指数。

解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A \quad (5.131)$$

则矩阵满足 Cayley-Hamilton 定理,

$$p(A) = A^2 - (\text{tr} A)A + (\det A)\mathbf{1} \equiv \mathbf{0} \quad (5.132)$$

矩阵的高次幂均可写成矩阵 A 的 0 次项和 1 次项的线性组合,

$$e^A = c_0 \mathbf{1} + c_1 A \bmod p(A) \quad (5.133)$$

可以把矩阵 A 替换成自变量 x,

$$c_0 + c_1 x = e^x \bmod p(x) \quad (5.134)$$

矩阵 A 的特征值满足

$$p(\lambda) = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} (\text{Tr} A \pm \sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \det A}) \quad (5.135)$$

于是

$$e^\lambda = c_0 + c_1 \lambda \quad (5.136)$$

即

$$\begin{cases} e^{\frac{\text{Tr} A}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \det A}} = c_0 + c_1 \frac{1}{2} (\text{Tr} A + \sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \det A}) \\ e^{\frac{\text{Tr} A}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \det A}} = c_0 + c_1 \frac{1}{2} (\text{Tr} A - \sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \det A}) \end{cases} \quad (5.137)$$

解出

$$\begin{cases} c_0 = e^{\frac{\text{Tr} A}{2}} \cosh \left(\sqrt{\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 - \det A} \right) - e^{\frac{\text{Tr} A}{2}} \frac{\text{Tr} A}{2} \cdot \frac{\sinh \left(\sqrt{\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 - \det A} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 - \det A}} \\ c_1 = e^{\frac{\text{Tr} A}{2}} \frac{\sinh \left(\sqrt{\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 - \det A} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 - \det A}} \end{cases} \quad (5.138)$$

当有重根时,

$$\left(\frac{\text{Tr} A}{2}\right)^2 - \det A = 0 \quad (5.139)$$

取极限得

$$c_0 = e^{\frac{\text{Tr} A}{2}} \left(1 - \frac{\text{Tr} A}{2}\right), \quad c_1 = e^{\frac{\text{Tr} A}{2}} \quad (5.140)$$

通过求解方程组

$$\begin{cases} e^\lambda = c_0 + c_1 \lambda \\ e^\lambda = c_1 \end{cases} \quad (5.141)$$

可得同样的结论。

2. 矩阵解

由运动方程(5.12)得

$$\ddot{\vec{\eta}} = -M^{-1}K\vec{\eta} \quad (5.142)$$

把状态矢量扩增至 $2n$ 个分量,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} \quad (5.143)$$

因此经过无穷小的时间 Δt 之后, 系统的状态是

$$\begin{pmatrix} \vec{\eta}(t + \Delta t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} + \Delta t \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} \quad (5.144)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\eta}(t + \Delta t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \left[\mathbf{1}_{2n \times 2n} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Delta t \right] \begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} \quad (5.145)$$

从 t 演化到 $t + \Delta t$ 的线性变换与时间 t 无关。

把区间 $[0, t]$ 等分得到 N 个区间,

$$\Delta t = \frac{t}{N} \quad (5.146)$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_2 = 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_N = t \quad (5.147)$$

那么

$$\vec{\eta}(t_1) = \left[\mathbf{1}_{2n \times 2n} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Delta t \right] \vec{\eta}(t_0) \quad (5.148)$$

$$\vec{\eta}(t_2) = \left[\mathbf{1}_{2n \times 2n} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Delta t \right]^2 \vec{\eta}(t_0) \quad (5.149)$$

$$\vdots$$

$$\vec{\eta}(t_N) = \left[\mathbf{1}_{2n \times 2n} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Delta t \right]^N \vec{\eta}(t_0) \quad (5.150)$$

取极限 $N \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\mathbf{1}_{2n \times 2n} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Delta t \right]^N = \exp \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Delta t \right\} \quad (5.151)$$

所以运动方程的解是

$$\begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} t \right\} \begin{pmatrix} \vec{\eta}(0) \\ \dot{\vec{\eta}}(0) \end{pmatrix} \quad (5.152)$$

上式中的线性变换, 称为**时间演化矩阵**,

$$U(t, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} t \right\} \quad (5.153)$$

可以用“精细求积法”求得时间演化矩阵的数值解。

为了化简表达式, 可以把时间演化矩阵展开成为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} t - \frac{(M^{-1}K \quad \mathbf{0})}{\mathbf{0} \quad M^{-1}K} \frac{t^2}{2!} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{(M^{-1}K \quad \mathbf{0})}{\mathbf{0} \quad M^{-1}K} \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (5.154)$$

把偶数项合并, 奇数项合并,

$$\exp \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} t \right\} = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{M^{-1}K}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos(t\sqrt{M^{-1}K}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sin(t\sqrt{M^{-1}K})}{\sqrt{M^{-1}K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\sin(t\sqrt{M^{-1}K})}{\sqrt{M^{-1}K}} \end{pmatrix} \quad (5.155)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{M^{-1}K}) & \frac{\sin(t\sqrt{M^{-1}K})}{\sqrt{M^{-1}K}} \\ -\sqrt{M^{-1}K} \sin(t\sqrt{M^{-1}K}) & \cos(t\sqrt{M^{-1}K}) \end{pmatrix}$$

所以方程的解是

$$\vec{\eta}(t) = \cos \sqrt{M^{-1}K} t \vec{\eta}(0) + \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}} \sin \sqrt{M^{-1}K} t \dot{\vec{\eta}}(0) \quad (5.156)$$

例 对本章第一个例题用矩阵法求解。

解: 解为

$$\begin{aligned}
& \vec{\eta}(t) \\
&= \cos \sqrt{M^{-1}K}t \vec{\eta}(0) + \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}} \sin \sqrt{M^{-1}K}t \dot{\vec{\eta}}(0) \\
&= \cos \sqrt{M^{-1}K}t^2 \vec{\eta}(0) + \frac{t}{\sqrt{M^{-1}K}t^2} \sin \sqrt{M^{-1}K}t^2 \dot{\vec{\eta}}(0)
\end{aligned} \tag{5.157}$$

其中

$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = k \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1}K = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.158}$$

矩阵 $M^{-1}Kt^2$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 4\omega_0^2 t^2 \lambda + 3\omega_0^4 t^4 \tag{5.159}$$

有两个不同的特征值，

$$\lambda_1 = 3\omega_0^2 t^2, \quad \lambda_2 = \omega_0^2 t^2 \tag{5.160}$$

设

$$\cos \sqrt{x} \bmod f(x) = c_0 + c_1 x \tag{5.161}$$

由

$$\cos \sqrt{\lambda_1} = c_0 + c_1 \lambda_1, \quad \cos \sqrt{\lambda_2} = c_0 + c_1 \lambda_2 \tag{5.162}$$

解得系数

$$c_0 = \frac{\lambda_1 \cos \sqrt{\lambda_2} - \lambda_2 \cos \sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2} (3 \cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \tag{5.163}$$

$$c_1 = \frac{\cos \sqrt{\lambda_1} - \cos \sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2\omega_0^2 t^2} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \tag{5.164}$$

所以

$$\cos \sqrt{M^{-1}K}t = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cos \omega_0 t - \frac{3}{2} \cos 3\omega_0 t & -\frac{1}{2} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \cos 3\omega_0 t \\ -\frac{1}{2} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \cos 3\omega_0 t & \frac{5}{2} \cos \omega_0 t - \frac{3}{2} \cos 3\omega_0 t \end{pmatrix} \tag{5.165}$$

再令

$$\frac{t}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \bmod f(x) = d_0 + d_1 x \tag{5.166}$$

解得

$$d_0 = \frac{t}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2}} \sin \sqrt{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}} \sin \sqrt{\lambda_1} \right) = \frac{1}{2\omega_0} \left(3 \sin \omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\omega_0 t \right) \tag{5.167}$$

$$d_1 = \frac{t}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \sin \sqrt{\lambda_1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \sin \sqrt{\lambda_2} \right) = \frac{1}{2\omega_0^3 t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\omega_0 t - \sin \omega_0 t \right) \tag{5.168}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}} \sin \sqrt{M^{-1}K}t \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0} \sin \sqrt{3}\omega_0 t & \frac{1}{2\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0} \sin \sqrt{3}\omega_0 t \\ \frac{1}{2\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0} \sin \sqrt{3}\omega_0 t & \frac{1}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0} \sin \sqrt{3}\omega_0 t \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.169}$$

于是

$$\begin{aligned}
\eta_1(t) &= \eta_1(0) \left(\frac{5}{2} \cos \omega_0 t - \frac{3}{2} \cos 3\omega_0 t \right) + \eta_2(0) \left(-\frac{1}{2} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \cos 3\omega_0 t \right) \\
&+ \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_0} \left(\frac{1}{2} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\omega_0 t \right) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_0} \left(\frac{1}{2} \sin \omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\omega_0 t \right)
\end{aligned} \tag{5.170}$$

$$\begin{aligned}
\eta_2(t) &= \eta_1(0) \left(-\frac{1}{2} \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \cos 3\omega_0 t \right) + \eta_2(0) \left(\frac{5}{2} \cos \omega_0 t - \frac{3}{2} \cos 3\omega_0 t \right) \\
&+ \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_0} \left(\frac{1}{2} \sin \omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\omega_0 t \right) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_0} \left(\frac{1}{2} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\omega_0 t \right)
\end{aligned} \tag{5.171}$$

五、 受迫振动和格林函数

1. 运动方程

如果微振动系统除了弹性势能，还受到外力 $F_j(t)$ 的策动，那么拉氏方程是

$$M_{jk}\ddot{\eta}_k + K_{jk}\eta_k = F_j(t) \quad (5.172)$$

利用模态矩阵化简，

$$A^T M \ddot{\vec{\eta}} + A^T K \vec{\eta} = A^T \vec{F} \triangleq \vec{Q}(t) \quad (5.173)$$

$$A^T M A A^{-1} \ddot{\vec{\eta}} + A^T K A A^{-1} \vec{\eta} = \vec{Q}(t) \quad (5.174)$$

$$\ddot{\xi} + \Omega \xi = \vec{Q}(t) \quad (5.175)$$

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = Q_j(t) \quad (j \text{ 不求和}) \quad (5.176)$$

在上式中，各个简正坐标已解耦，都是如下形式的微分方程，

$$\ddot{f} + \omega^2 f = Q(t) \quad (5.177)$$

当 $Q(t) = 0$ 时，此方程的通解是

$$f(t) = f(0) \cos \omega t + \dot{f}(0) \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (5.178)$$

通解满足

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0 \quad (5.179)$$

通解中的第一项 $\cos \omega t$ 是**初位移响应**，第二项 $\sin \omega t / \omega$ 是**初速度响应**。

要求出方程的一般解，还需考虑策动力 $Q(t)$ 的影响。

2. 解的叠加性

定理一 已知线性微分方程 $\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0$ 的两个解 $f_1(t), f_2(t)$ ，那么它们的线性组合

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad (5.180)$$

也是微分方程的解。

定理二 如果 $f_\alpha(t)$ 是

$$\ddot{f}_\alpha(t) + \omega^2 f_\alpha(t) = Q_\alpha(t) \quad (5.181)$$

的解。记

$$Q(t) \triangleq \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(t), \quad f(t) \triangleq \sum_{\alpha} f_{\alpha}(t) \quad (5.182)$$

那么 $f(t)$ 是方程

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = Q(t) \quad (5.183)$$

的解。

3. 格林函数

从初始时刻 $t=0$ 起持续作用于系统的策动力 $Q(t)$ ，可以看成是冲击力 $\delta(t-t')$ 的线性叠加，

$$Q(t) = \int_0^{+\infty} Q(t') \delta(t-t') dt' \quad (5.184)$$

因此我们先求出微分方程

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = \delta(t-t') \quad (5.185)$$

满足初条件 $f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0$ 的解，这个解称为**格林函数** (Green's function)。

为了求解方程，可利用拉普拉斯变换 (Laplace transformation)：

$$L(s) = \mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (5.186)$$

和逆变换

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L(s) e^{st} ds \quad (t \geq 0, \sigma \geq 0) \quad (5.187)$$

拉普拉斯有如下性质：

$$\mathcal{L}[f(t)] = L(s) \quad (5.188)$$

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sL(s) - f(0) \quad (5.189)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2 L(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (5.190)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-t')] = h(t')e^{-t's} \quad (5.191)$$

其中 $h(t-t')$ 是阶跃函数（或称为 Heaviside 函数），

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (5.192)$$

对受迫振动的运动方程(5.185)作拉普拉斯变换，

$$s^2 L(s) - sf(0) - \dot{f}(0) + \omega^2 L(s) = h(t')e^{-t's} \quad (5.193)$$

解出

$$L(s) = \frac{h(t')e^{-t's} + sf(0) + \dot{f}(0)}{s^2 + \omega^2} \quad (5.194)$$

然后作逆变换，查表得

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[L(s)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L(s)e^{st} ds \quad (t \geq 0, \sigma \geq 0) \\ &= f(0) \cos(\omega t) + \dot{f}(0) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} + h(t-t') \frac{\sin[\omega(t-t')]}{\omega} \end{aligned} \quad (5.195)$$

所以格林函数是

$$G(t, t') = h(t-t') \frac{\sin[\omega(t-t')]}{\omega} \quad (5.196)$$

格林函数又称生成函数、响应函数（电路理论、信号处理）或传播子（粒子物理、量子场论）。格林函数满足因果性。

我们也可以用另一种方式得出格林函数：在 $t=t'$ 时刻对谐振子施加冲量 **1** 之后， $\dot{f}(t')$ 增加了 **1**，初条件是

$$f(t') = 0, \quad \dot{f}(t') = 1 \quad (5.197)$$

根据通解的表达式(5.141)，在 $t > t'$ 时有速度响应

$$\frac{\sin[\omega(t-t')]}{\omega} \quad (5.198)$$

与(5.159)式一致。

4. 简正坐标的一般解

由叠加原理，方程(5.146)满足 $f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0$ 的特解是

$$\int_0^\infty Q(t') h(t-t') \frac{\sin[\omega(t-t')]}{\omega} dt' = \frac{1}{\omega} \int_0^t Q(t') \sin[\omega(t-t')] dt' \quad (5.199)$$

所以方程

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = Q_j(t), \quad t \geq 0 \quad (5.200)$$

的一般解为

$$\xi_j(t) = \xi_j(0) \cos(\omega_j t) + \dot{\xi}_j(0) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} + \frac{1}{\omega_j} \int_0^t Q_j(t') \sin[\omega_j(t-t')] dt' \quad (5.201)$$

如果策动力是从 t_0 时刻起施加的，则 $t \geq t_0$ 时，

$$\xi_j(t) = \xi_j(t_0) \cos[\omega_j(t-t_0)] + \dot{\xi}_j(t_0) \frac{\sin[\omega_j(t-t_0)]}{\omega_j} + \frac{1}{\omega_j} \int_{t_0}^t Q_j(t') \sin[\omega_j(t-t')] dt' \quad (5.202)$$

5. 微振动坐标的一般解和格林函数

有策动力时，运动方程为

$$\ddot{\vec{\eta}} = -M^{-1}K\vec{\eta} + M^{-1}\vec{F} \quad (5.203)$$

根据矩阵解(5.119)，初速度响应是

$$\frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}} \sin \sqrt{M^{-1}K} t \quad (5.204)$$

格林函数是 t' 时刻冲击力导致的速度增量，在 t 时刻引起的位移响应，

$$G(t, t') = h(t-t') \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}} \sin(\sqrt{M^{-1}K}(t-t')) M^{-1} \quad (5.205)$$

$G_{jk}(t, t')$ 表示 t' 时刻 k 分量上施加的冲击力，在 t 时刻 j 分量造成的位移。

利用格林函数写出微振动坐标的一般解，

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}(t) = & \cos(\sqrt{M^{-1}K}(t-t_0)) \ddot{\eta}(t_0) + \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}} \sin(\sqrt{M^{-1}K}(t-t_0)) \dot{\ddot{\eta}}(t_0) \\ & + \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}} \int_{t_0}^t \sin(\sqrt{M^{-1}K}(t-t')) M^{-1} \vec{F}(t') dt'\end{aligned}\quad (5.206)$$

6. 共振

如果外力是周期力，且频率 $\omega = \omega_j$ 与某个自然频率重合，

$$Q_j(t) = Q_{0j} \cos(\omega_j t + \theta), \quad t \geq 0 \quad (5.207)$$

代入(5.165)式得

$$\xi_j(t) = \xi_j(0) \cos \omega_j t + \dot{\xi}_j(0) \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j} + \frac{Q_{0j}}{\omega_j} \int_0^t \cos(\omega_j t' + \theta) \sin[\omega_j(t-t')] dt' \quad (5.208)$$

和差化积然后积分，

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad (5.209)$$

$$\begin{aligned}& \int_0^t \cos(\omega_j t' + \theta) \sin(\omega_j(t-t')) dt' \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(\omega_j t + \theta) - \sin(2\omega_j t' - \omega_j t + \theta)] dt' \\ &= \frac{1}{2} t \sin(\omega_j t + \theta) - \frac{1}{2\omega_j} \sin \theta \sin \omega_j t\end{aligned}\quad (5.210)$$

$$\xi_j(t) = \xi_j(0) \cos(\omega_j t) + \dot{\xi}_j(0) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} + \frac{Q_{0j}}{2\omega_j} \left[t \sin(\omega_j t + \theta) - \frac{1}{\omega_j} \sin \theta \sin \omega_j t \right] \quad (5.211)$$

在 $t \rightarrow +\infty$ 时，

$$\xi_j(t) \approx \frac{Q_{0j}}{2\omega_j} t \sin(\omega_j t + \theta) \quad (5.212)$$

振幅趋于无穷大，系统产生了共振（resonance）。

不过在振幅较大时，简谐近似是不合适的，必须考虑非线性项。

7. 参数共振*

设微振动系统的参数（朗道，《力学》），随时间周期性微小变化（例如荡秋千），比如

$$\omega_0^2 \rightarrow \omega_0^2(1 + \varepsilon \cos(\omega t + \varphi)) \quad (5.213)$$

$$0 < \varepsilon < 2\pi \quad (5.214)$$

运动方程（Mathieu equation）为

$$\ddot{\eta} + (\omega_0^2 + \varepsilon \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi)) \eta = 0 \quad (5.215)$$

$$\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta = -\varepsilon \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) \eta \quad (5.216)$$

把式子右边视为微扰项，迭代可知

$$\eta(t) = c_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + c_1 \cos((\omega \pm \omega_0)t + \theta_{\pm 1}) + c_2 \cos((2\omega \pm \omega_0)t + \theta_{\pm 2}) + \dots \quad (5.217)$$

现在把方程右边看作外力，可见

$$n\omega - \omega_0 = \omega_0 \quad (5.218)$$

时会产生共振，

$$\omega = \frac{2}{n} \omega_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.219)$$

运动方程写成

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + \varepsilon \cos \omega t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \quad (5.220)$$

时间 $t = 0 \rightarrow t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ 的演化矩阵 A 满足

$$\begin{pmatrix} \eta(T) \\ \dot{\eta}(T) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \dot{\eta}(0) \end{pmatrix} \quad (5.221)$$

$$\det A = 1 \quad (5.222)$$

原因是

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + \varepsilon \cos \omega t) & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.223)$$

在整个演化过程中，雅可比行列式均为 1。

定义：相空间V中的线性映射

$$\vec{x} \rightarrow A\vec{x} \quad (5.224)$$

其不动点 $\vec{x}_0 = A\vec{x}_0$ 若满足

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta \hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |A^n \vec{x} - A^n \vec{x}_0| < \varepsilon \quad (5.225)$$

或等价地

$$\exists \delta > 0, |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta \hookrightarrow |A^n \vec{x} - A^n \vec{x}_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (5.226)$$

则称 $\vec{x}_0$ 是渐近稳定（李雅普诺夫稳定）。

记A的两个特征值为 λ_1, λ_2 ,

$$\det A = 1 \implies \lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (5.227)$$

A是实矩阵，特征多项式的复根成对。有两种可能：（1） $\lambda_1 = \lambda_2^* \implies |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ，系统稳定；

（2）特征值都是实数， $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \geq 4\lambda_1 \lambda_2 = 4$ ， $|\text{tr} A| \geq 2$ ，当 $\text{tr} A = \pm 2$ 时系统稳定。

总之，当 $|\text{tr} A| > 2$ 时系统不稳定。

考虑 $n = 1$ 的参数共振，设

$$\omega = 2\omega_0 + \Delta\omega \quad (5.228)$$

其中 $\Delta\omega$ 是对共振频率的微小偏离。设运动方程的解为

$$\eta(t) = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t \quad (5.229)$$

这里 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是随时间缓慢变换的函数，其导数为 1 阶无穷小量。代入运动方程，保留到 1 阶无穷小，舍弃非共振项（频率不靠近 ω_0 的三角振荡），得

$$-\left(2\dot{a} + b\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 b\right)\omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t + \left(2\dot{b} - a\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 a\right)\omega_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t = 0 \quad (5.230)$$

$$\implies \begin{cases} 2\dot{a} + b\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 b = 0 \\ 2\dot{b} - a\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 a = 0 \end{cases} \quad (5.231)$$

设振幅指数增长，

$$a(t) = a_0 e^{\mu t}, \quad b(t) = b_0 e^{\mu t} \quad (5.232)$$

代入上式，

$$\begin{pmatrix} \mu & \frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0 \\ -\frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.233)$$

有解的条件是系数矩阵的行列式为零，从而

$$\left(\frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0\right)\left(-\frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0\right) > 0 \quad (5.234)$$

$$\implies |\Delta\omega| < \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 \quad (5.235)$$

当参数共振的频率变高时，频率的共振范围减小。只有 $n = 1, 2$ 比较容易实现。

参数共振在船运、电路、控制理论以及量子信息中有应用。

六、 阻尼振动

1. 运动方程

设阻尼正比于速度，可以用瑞利耗散函数

$$G = \frac{1}{2} \mu_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \quad (5.236)$$

描述，那么运动方程为

$$M_{jk} \ddot{\eta}_k + \mu_{jk} \dot{\eta}_k + K_{jk} \eta_k = 0 \quad (5.237)$$

$$M \ddot{\vec{\eta}} + \mu \dot{\vec{\eta}} + K \vec{\eta} = \vec{0} \quad (5.238)$$

其中 M, μ, K 是正定实对称矩阵。

受外力驱动时，阻尼振动方程是

$$M \ddot{\vec{\eta}} + \mu \dot{\vec{\eta}} + K \vec{\eta} = \vec{F}(t) \quad (5.239)$$

一般来说，与无阻尼的情形不同，我们无法利用合同变换把三个对称矩阵同时对角化。

2. 可对角化的情形

具有结构阻尼的系统，其阻尼矩阵是刚度矩阵和惯性矩阵的线性组合，

$$\mu_{jk} = \alpha M_{jk} + \beta K_{jk} \quad (5.240)$$

这时可以用模态矩阵把三个矩阵 M, μ 和 K 同时对角化，运动方程解耦成为单个自由度的阻尼振子。

下面考虑比结构阻尼更一般的情形。

设方程的解为

$$\vec{\eta}(t) = \exp(Bt) \vec{c} \quad (5.241)$$

代入方程(5.201)得

$$MB^2 \exp(Bt) \vec{c} + \mu B \exp(Bt) \vec{c} + K \exp(Bt) \vec{c} = \vec{0} \quad (5.242)$$

矢量 $\vec{c}$ 可以取任意值，所以矩阵 B 满足二次矩阵方程（quadratic matrix equation）：

$$MB^2 + \mu B + K = \mathbf{0} \quad (5.243)$$

两边同乘以 M^{-1} ，得

$$B^2 + M^{-1} \mu B + M^{-1} K = \mathbf{0} \quad (5.244)$$

矩阵与复数的区别，主要在于乘法的非对易性。当方程中的两个系数 $M^{-1} \mu$ 和 $M^{-1} K$ 互相对易时³，解上面的方程与求二次多项式的根没有什么不同之处。这表明，当三个矩阵满足条件

$$[M^{-1} \mu, M^{-1} K] = 0 \Leftrightarrow \mu M^{-1} K = K M^{-1} \mu \quad (5.245)$$

时，矩阵方程的解为

$$B_1 = -\frac{1}{2} M^{-1} \mu + i\sqrt{\Omega}, \quad B_2 = -\frac{1}{2} M^{-1} \mu - i\sqrt{\Omega} \quad (5.246)$$

其中

$$\Omega \triangleq M^{-1} K - \frac{1}{4} (M^{-1} \mu)^2 \quad (5.247)$$

运动方程(5.201)的通解为

$$\vec{\eta}(t) = \exp(B_1 t) \vec{c}_1 + \exp(B_2 t) \vec{c}_2 \quad (5.248)$$

代入初值条件，

$$\vec{c}_1 + \vec{c}_2 = \vec{\eta}(0) \quad (5.249)$$

$$B_1 \vec{c}_1 + B_2 \vec{c}_2 = \dot{\vec{\eta}}(0) \quad (5.250)$$

解出

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{B_2 - B_1} [B_2 \vec{\eta}(0) - \dot{\vec{\eta}}(0)] = -\frac{1}{2i\sqrt{\Omega}} [B_2 \vec{\eta}(0) - \dot{\vec{\eta}}(0)] \quad (5.251)$$

$$\vec{c}_2 = \frac{1}{B_1 - B_2} [B_1 \vec{\eta}(0) - \dot{\vec{\eta}}(0)] = \frac{1}{2i\sqrt{\Omega}} [B_1 \vec{\eta}(0) - \dot{\vec{\eta}}(0)] \quad (5.252)$$

这里要求 Ω 可逆，

$$\det(\mu^2 - 4MK) \neq 0 \quad (5.253)$$

化简后的解是

³ 等价于 M, μ, K 可用合同变换同时对角化。

$$\vec{\eta}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}M^{-1}\mu t\right) \left\{ \left[\cos(\sqrt{\Omega}t) + \frac{M^{-1}\mu}{2\sqrt{\Omega}} \sin(\sqrt{\Omega}t) \right] \vec{\eta}(0) + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sin(\sqrt{\Omega}t) \dot{\vec{\eta}}(0) \right\} \quad (5.254)$$

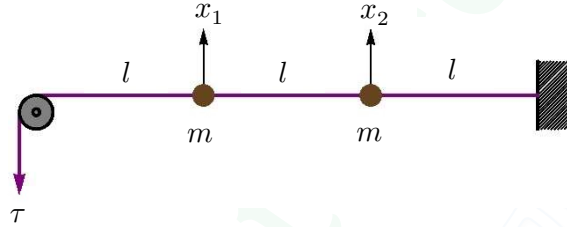
根据上式中的初速度响应，得出格林函数是

$$G(t, t') = h(t - t') \exp\left[-\frac{1}{2}M^{-1}\mu(t - t')\right] \frac{\sin[\sqrt{\Omega}(t - t')]}{\sqrt{\Omega}} M^{-1} \quad (5.255)$$

利用格林函数，得受迫振动运动方程(5.202)的一般解

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(t) = & \exp\left[-\frac{1}{2}M^{-1}\mu(t - t_0)\right] \left\{ \cos[\sqrt{\Omega}(t - t_0)] + \frac{M^{-1}\mu}{2\sqrt{\Omega}} \sin[\sqrt{\Omega}(t - t_0)] \right\} \vec{\eta}(t_0) \\ & + \exp\left[-\frac{1}{2}M^{-1}\mu(t - t_0)\right] \frac{\sin[\sqrt{\Omega}(t - t_0)]}{\sqrt{\Omega}} \dot{\vec{\eta}}(t_0) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{1}{2}M^{-1}\mu(t - t')\right] \sin[\sqrt{\Omega}(t - t')] M^{-1} \vec{F}(t') dt' \end{aligned} \quad (5.256)$$

例 如图所示，长 $3l$ 的轻绳，一段系在固定点处，另一端受很大的张力 τ ，拉直处于水平直线状态。绳子的三等分点处，系有两个质量 m 的质点。忽略质点的重力。



考虑垂直于绳子方向的微振动，设微振动坐标是 x_1 和 x_2 。质点受到空气阻力的作用，阻力正比于速度，比例系数为 β 。

对第一个质点施加周期性的策动力

$$F(t) = F_0 \cos \omega t, \quad t \geq 0 \quad (5.257)$$

求系统的稳态解。

解：系统的动能是

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (5.258)$$

发生横向偏移后，水平线以上的绳长是

$$\sqrt{l^2 + x_1^2} + \sqrt{l^2 + (x_1 - x_2)^2} + \sqrt{l^2 + x_2^2} \quad (5.259)$$

与原长相减，

$$\sqrt{l^2 + x_1^2} - l = \frac{x_1^2}{\sqrt{l^2 + x_1^2} + l} \approx \frac{x_1^2}{2l} \quad (5.260)$$

$$\sqrt{l^2 + (x_1 - x_2)^2} - l \approx \frac{1}{2l} (x_1 - x_2)^2 \quad (5.261)$$

$$\sqrt{l^2 + x_2^2} - l \approx \frac{x_2^2}{2l} \quad (5.262)$$

张力所做的功，即为增加的势能，

$$V = \frac{\tau}{2l} [x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2] = \frac{\tau}{l} (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \quad (5.263)$$

阻尼力的耗散函数是

$$R = \frac{1}{2} \beta (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (5.264)$$

因此惯性矩阵、耗散系数矩阵和刚度矩阵分别是

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2\frac{\tau}{l} & -\frac{\tau}{l} \\ -\frac{\tau}{l} & 2\frac{\tau}{l} \end{pmatrix} \quad (5.265)$$

这是结构阻尼系统。由于存在阻尼，初位移和初速度响应随时间指数衰减。稳态解来自于对策动力的响应。策动力的响应是

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{2} M^{-1} \mu(t-t')\right] \sin[\sqrt{\Omega}(t-t')] M^{-1} \vec{F}(t') dt' \quad (5.266)$$

化简其中的矩阵，

$$\Omega = M^{-1} K - \frac{1}{4} (M^{-1} \mu)^2 = \begin{pmatrix} 2\frac{\tau}{ml} - \frac{\beta^2}{4m^2} & -\frac{\tau}{ml} \\ -\frac{\tau}{ml} & 2\frac{\tau}{ml} - \frac{\beta^2}{4m^2} \end{pmatrix} \quad (5.267)$$

特征值是

$$\omega_1^2 = \frac{4m\tau - \beta^2 l}{4m^2 l}, \quad \omega_2^2 = \frac{12m\tau - \beta^2 l}{4m^2 l} \quad (5.268)$$

从方程

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sin(\sqrt{\Omega} t') = c_0 \mathbf{1}_{2 \times 2} + c_1 \Omega \quad (5.269)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_1} \sin[\omega_1(t-t')] = c_0 + c_1 \omega_1^2 \\ \frac{1}{\omega_2} \sin[\omega_2(t-t')] = c_0 + c_1 \omega_2^2 \end{cases} \quad (5.270)$$

解出

$$\begin{cases} c_0 = \frac{-\omega_2^3 \sin[\omega_1(t-t')] + \omega_1^3 \sin[\omega_2(t-t')]}{\omega_1^3 \omega_2 - \omega_1 \omega_2^3} \\ c_1 = \frac{\omega_2 \sin[\omega_1(t-t')] - \omega_1 \sin[\omega_2(t-t')]}{\omega_1^3 \omega_2 - \omega_1 \omega_2^3} \end{cases} \quad (5.271)$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_0^t \exp[-b(t-t')] \sin[\omega_j(t-t')] \cos \omega t' dt' \\ &= \frac{1}{[b^2 + (\omega - \omega_j)^2][b^2 + (\omega + \omega_j)^2]} \{ \omega_j(b^2 - \omega^2 + \omega_j^2) \cos \omega t + 2b\omega\omega_j \sin \omega t \} \\ &+ \frac{e^{-bt}}{[b^2 + (\omega - \omega_j)^2][b^2 + (\omega + \omega_j)^2]} \{ -\omega_j(b^2 - \omega^2 + \omega_j^2) \cos \omega_j t - b(b^2 + \omega^2 + \omega_j^2) \sin \omega_j t \} \end{aligned} \quad (5.272)$$

策动力造成的稳态项，圆频率只能是 ω 。

总之，我们可以直接设稳态解（复函数）是

$$\vec{\eta} = \vec{a} \exp(-i\omega t) \quad (5.273)$$

代入运动方程得

$$(-\omega^2 M + i\omega\mu + K) \vec{a} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.274)$$

$$\vec{a} = \frac{F_0 l}{-\tau^2 + [2\tau + \omega l(i\beta - m\omega)]^2} \begin{pmatrix} 2\tau + \omega l(i\beta - m\omega) \\ \tau \end{pmatrix} \quad (5.275)$$

$$\vec{x}(t) = \text{Re}[\vec{a} \exp(-i\omega t)] \quad (5.276)$$

3. 矩阵解法

方程可写成

$$\ddot{\vec{\eta}} = -M^{-1} \mu \dot{\vec{\eta}} - M^{-1} K \vec{\eta} \quad (5.277)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \dot{\vec{\eta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1} K & -M^{-1} \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \dot{\vec{\eta}} \end{pmatrix} \quad (5.278)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\eta}(t) \\ \dot{\vec{\eta}}(t) \end{pmatrix} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -M^{-1} K & -M^{-1} \mu \end{pmatrix} t \right\} \begin{pmatrix} \vec{\eta}(0) \\ \dot{\vec{\eta}}(0) \end{pmatrix} \quad (5.279)$$

化简矩阵指数函数得闭式解。

4. 特征方程法*

以试探解 $\eta_j(t) = Ca_j e^{\gamma t}$ 代入方程得

$$(\gamma^2 M + \gamma \mu + K) \vec{a} = \vec{0} \quad (5.280)$$

有解的条件为

$$\det(\gamma^2 M + \gamma \mu + K) = 0 \quad (5.281)$$

解出特征值 γ (是成对的复数, 且可证实部是负数⁴), 再代入特征方程求解对应的特征矢。通解是特征解的线性组合。

七、微扰和重整化*

1. 单摆问题的精确解

单摆问题的拉氏量

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \quad (5.282)$$

运动方程为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \omega_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{l} \quad (5.283)$$

变形为

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -2\omega_0^2 \sin \theta \quad (5.284)$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2 \cos \theta + c_1 \quad (5.285)$$

开方得

$$dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2 \cos \theta + c_1}} \quad (5.286)$$

积分得解析解

$$t = \pm \int \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2 \cos \theta + c_1}} + c_2 \quad (5.287)$$

若振幅为 α , 且初条件为

$$\theta(0) = \alpha, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (5.288)$$

则

$$\begin{aligned} c_1 &= -2\omega_0^2 \cos \alpha \\ t &= \pm \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos \theta' - \cos \alpha)}} = \pm \frac{1}{2\omega_0} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta'}{2}}} \\ &\xrightarrow{\sin \frac{\theta'}{2} / \sin \frac{\alpha}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \sin x} \pm \frac{1}{\omega_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(\sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\alpha}{2})} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 x}} \\ &= -\frac{1}{\omega_0} F\left(\arcsin\left(\sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\alpha}{2}\right) \middle| \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.289)$$

其中第一类椭圆积分定义为

$$F(\phi|m) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\phi} \frac{du}{\sqrt{1 - m \sin^2 u}}, \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (5.291)$$

周期为

$$T = 4 \cdot \frac{1}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad (5.292)$$

⁴ 一对复根满足 $\gamma^2(\vec{a}^\dagger M \vec{a}) + \gamma(\vec{a}^\dagger \mu \vec{a}) + (\vec{a}^\dagger K \vec{a}) = 0$, 所以这个二次方程的两根之和为

$$\gamma + \gamma^* = -\frac{(\vec{a}^\dagger \mu \vec{a})}{(\vec{a}^\dagger M \vec{a})} < 0$$

即 $\text{Re } \gamma < 0$.

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11\alpha^4}{3072} + \frac{173\alpha^6}{737280} + \frac{22931\alpha^8}{1321205760} + \dots \quad (5.293)$$

圆频率

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\pi^2}{4\{F(\frac{\pi}{2}|\sin^2\frac{\alpha}{2})\}^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{7\alpha^4}{1536} - \frac{19\alpha^6}{184320} + \frac{127\alpha^8}{660602880} + \mathcal{O}(\alpha^{10}) \quad (5.294)$$

这里给出的精确解，供后面与微扰论结果作对比之用。

2. 微扰法

①微扰参数

考虑方程

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \lambda \omega_0^2 (\theta - \sin \theta) \quad (5.295)$$

其中参数 λ 本应取 $\lambda = 1$ ，这里延拓为实参数。

振幅不大时，与参数 λ 相乘的因子 $\theta - \sin \theta$ 是小量， λ 可用来标记微扰项的量级。

②级数展开

设方程的解为

$$\theta = \theta(t, \lambda) \quad (5.296)$$

对 λ 展开，

$$\theta(t, \lambda) \equiv \theta_0(t) + \lambda \theta_1(t) + \lambda^2 \theta_2(t) + \dots \quad (5.297)$$

③真实频率

考虑到微扰项会改变周期，为了更快收敛到精确解，令实际的圆频率是

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda \omega_1^2 - \lambda^2 \omega_2^2 - \dots \quad (5.298)$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \omega^2 + \lambda \omega_1^2 + \lambda^2 \omega_2^2 + \dots \quad (5.299)$$

即将 ω_0^2 分拆为各阶微扰贡献之和。

上式中的展开系数 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots$ ，实际上我们可以自由设定其数值，只要能保证在 $\lambda = 1$ 时，

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots \quad (5.300)$$

成立即可。

④微扰方程

把展开式代入运动方程，然后把方程两边按 λ 幂次展开，等号两边各阶的系数都应相等。

下面我们准备计算到 λ 的二阶项，并保留微扰项到 $\mathcal{O}(\lambda^3)$ ，舍弃 $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ 的高阶项，方程是

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_0 + \lambda \ddot{\theta}_1 + \lambda^2 \ddot{\theta}_2) + (\omega^2 + \lambda \omega_1^2 + \lambda^2 \omega_2^2)(\theta_0 + \lambda \theta_1 + \lambda^2 \theta_2) \\ &= \lambda(\omega^2 + \lambda \omega_1^2) \frac{1}{6} (\theta_0 + \lambda \theta_1)^3 + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (5.301)$$

按 λ 的幂次合并，得

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_0 + \omega^2 \theta_0) + (\ddot{\theta}_1 + \omega^2 \theta_1 + \omega_1^2 \theta_0) \lambda + (\ddot{\theta}_2 + \omega^2 \theta_2 + \omega_1^2 \theta_1 + \omega_2^2 \theta_0) \lambda^2 \\ &= \omega^2 \frac{1}{6} \theta_0^3 \lambda + \left\{ \omega^2 \frac{1}{2} \theta_0^2 \theta_1 + \omega_1^2 \frac{1}{6} \theta_0^3 \right\} \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (5.302)$$

比较方程左右两侧，得到零阶、一阶和二阶微扰方程：

$$\ddot{\theta}_0 + \omega^2 \theta_0 = 0 \quad (5.303)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \omega^2 \theta_1 + \omega_1^2 \theta_0 = \frac{1}{6} \omega^2 \theta_0^3 \quad (5.304)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2 \theta_2 + \omega_1^2 \theta_1 + \omega_2^2 \theta_0 = \frac{1}{2} \omega^2 \theta_0^2 \theta_1 + \frac{1}{6} \omega_1^2 \theta_0^3 \quad (5.305)$$

⑤一阶微扰的共振项

零阶方程解出

$$\theta_0(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.306)$$

代入一阶微扰方程，

$$\ddot{\theta}_1 + \omega^2 \theta_1 = -\omega_1^2 \theta_0 + \frac{1}{6} \omega^2 \theta_0^3 \quad (5.307)$$

等式右边均为已知函数，相当于受迫振动问题中的策动力。

利用三角公式

$$\cos^3 \phi = \frac{3}{4} \cos \phi + \frac{1}{4} \cos 3\phi \quad (5.308)$$

右边化简为

$$-\omega_1^2\theta_0 + \frac{1}{6}\omega^2\theta_0^3 = \left(-\omega_1^2A_0 + \frac{1}{8}\omega^2A_0^3\right)\cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{24}\omega^2A_0^3\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \quad (5.309)$$

其中第一项会导致 $\theta_1(t)$ 含有 $t\sin\omega t$ 形式的共振项, 当 t 较大时, $\theta_1(t)$ 会比 $\theta_0(t)$ 更重要, 级数的会发散。

⑥一阶微扰方程的重整化

我们选择参数 ω_1^2 以使共振项为零(即对频率 ω^2 重整化, 选择恰当的 ω_1^2, ω_2^2 取值, 会使得计算有意义, 不发散),

$$-\omega_1^2A_0 + \frac{1}{8}\omega^2A_0^3 = 0 \quad (5.310)$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{8}A_0^2\omega^2 \quad (5.311)$$

这时一阶微扰方程成为

$$\ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 = \frac{1}{24}A_0^3\omega^2\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \quad (5.312)$$

⑦一阶微扰方程的解

一阶微扰方程的解为

$$\theta_1(t) = c_1\cos(\omega t + \varphi_1) - \frac{A_0^3}{192}\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \quad (5.313)$$

为了得到好的收敛性, 令 $c_1 = 0$,

$$\theta_1(t) = -\frac{A_0^3}{192}\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \quad (5.314)$$

⑧二阶微扰方程的共振项

把 θ_0 和 θ_1 代入二阶微扰方程,

$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2\theta_2 = -\omega_2^2\theta_0 + \frac{1}{6}\omega_1^2\theta_0^3 - \omega_1^2\theta_1 + \frac{1}{2}\omega^2\theta_0^2\theta_1 \quad (5.315)$$

右式为

$$\begin{aligned} & -\omega_2^2\theta_0 + \frac{1}{6}\omega_1^2\theta_0^3 - \omega_1^2\theta_1 + \frac{1}{2}\omega^2\theta_0^2\theta_1 \\ &= \left(-\omega_2^2A_0 + \frac{1}{6}\omega_1^2A_0^3 \cdot \frac{3}{4}\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \left(\frac{1}{6}\omega_1^2A_0^3 \cdot \frac{1}{4} + \omega_1^2\frac{A_0^3}{192}\right)\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\ & \quad + \frac{1}{2}\omega^2A_0^2\left(-\frac{A_0^3}{192}\right)\cos^2(\omega t + \varphi_1)\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\ &= \left(-\omega_2^2A_0 + \frac{1}{8}\omega_1^2A_0^3\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{3}{64}\omega_1^2A_0^3\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\ & \quad - \frac{1}{384}\omega^2A_0^5\frac{1}{4}\{\cos(\omega t + \varphi_1) + 2\cos(3\omega t + 3\varphi_0) + \cos(5\omega t + 5\varphi_0)\} \\ &= \left(-\omega_2^2A_0 + \frac{1}{64}\omega^2A_0^5 - \frac{1}{1536}\omega^2A_0^5\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \left(\frac{3}{512}\omega^2A_0^5 - \frac{1}{768}\omega^2A_0^5\right)\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\ & \quad - \frac{1}{1536}\omega^2A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0) \\ &= \left(-\omega_2^2A_0 + \frac{23}{1536}\omega^2A_0^5\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{7}{1536}\omega^2A_0^5\cos(3\omega t + 3\varphi_0) - \frac{1}{1536}\omega^2A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0) \end{aligned} \quad (5.316)$$

⑨二阶微扰方程的重整化

为了好的收敛性, 需令

$$-\omega_2^2A_0 + \frac{23}{1536}\omega^2A_0^5 = 0 \quad (5.317)$$

解出

$$\omega_2^2 = \frac{23}{1536}A_0^4\omega^2 \quad (5.318)$$

⑩二阶微扰方程的解

二阶方程成为

$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2\theta_2 = \frac{7}{1536}\omega^2A_0^5\cos(3\omega t + 3\varphi_0) - \frac{1}{1536}\omega^2A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0) \quad (5.319)$$

解得

$$\theta_2(t) = -\frac{7}{12288}A_0^5\cos(3\omega t + 3\varphi_0) + \frac{1}{36864}A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0) \quad (5.320)$$

上式中已取 $\cos(\omega t + \varphi_0)$ 项的系数为零。

⑪ 合并

最后取 $\lambda = 1$ ，准确到二阶，

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) \\ &= A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) - \left(\frac{A_0^3}{192} + \frac{7}{12288} A_0^5 \right) \cos(3\omega t + 3\varphi_0) + \frac{1}{36864} A_0^5 \cos(5\omega t + 5\varphi_0)\end{aligned}\quad (5.321)$$

其中真实频率 ω 满足

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2 + \frac{1}{8} A_0^2 \omega^2 + \frac{23}{1536} A_0^4 \omega^2 \quad (5.322)$$

解得

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{8} A_0^2 + \frac{23}{1536} A_0^4} \quad (5.323)$$

周期为

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{1}{8} A_0^2 + \frac{23}{1536} A_0^4} \quad (5.324)$$

$$\frac{T_2}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{8} A_0^2 + \frac{23}{1536} A_0^4} \approx 1 + \frac{A_0^2}{16} + \frac{17A_0^4}{3072} \quad (5.325)$$

注意这里的 A_0 并不是振幅。

⑫ 与精确解对比

在

$$\omega t + \varphi_0 = 0 \quad (5.326)$$

时，求得振幅是

$$\alpha = \theta(t) \approx A_0 - \frac{A_0^3}{192} - \frac{5A_0^5}{9216} \quad (5.327)$$

从上面的方程解出

$$A_0 \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{192} + \frac{23\alpha^5}{36864} \quad (5.328)$$

代入前面的结果(5.252)式和(5.254)式，得到周期、角频率对振幅 α 的依赖关系是

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{19\alpha^4}{3072} + \mathcal{O}(\alpha^6) \quad (5.329)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^4}{1536} + \mathcal{O}(\alpha^6) \quad (5.330)$$

与精确解(5.234)式和(5.235)式对比，可知前两项完全相同，重整化的方法确实有效。