

第4章 对称性和守恒量

SYMMETRY DICTATES INTERACTIONS.

——杨振宁

最小作用量原理和对称性是现代物理理论的两个基石。

对称变换可以用来发现守恒量，在求解运动方程时简化计算。更重要的是，物理系统的对称性，不仅帮助我们统一了自然界的基本作用力，还指导着我们探索、构建新理论模型。

一、对称变换与守恒量

通过拉格朗日函数的表达式，我们可以发现一些明显的守恒量，比如广义动量或广义能量。这种发现依赖于选用的广义坐标参数是否合适——更换一组广义坐标，很可能就不再存在何循环坐标。

怎样才能方便地找到守恒量？数学家诺特给出了一般性的结论¹，可以简单叙述为

对拉格朗日系统的任何一个可微对称性，都存在对应的守恒量。

作为物理定理，只有文字描述是不够的，还需要严谨的定义和论证。下面我们来解释什么是可微对称性，以及什么是对应的诺特守恒量。



Emmy Amalie Noether
1882-1935, 德国数学家

1. 对称变换和准对称变换

考虑时间以及广义坐标 $(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$ 所在的 $n+1$ 维流形 M 到自身的映射，

$$\xi: M \rightarrow M$$

设变换前后的时空坐标之间的关系是

$$t' = \xi_0(t, q, \lambda)$$

$$q'_\alpha = \xi_\alpha(t, q, \lambda), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

其中 λ 是一组实参数 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ ，可能是空间平移的距离、转动的角度，或者缩放的尺度等。

约定恒等变换的参数取值是

$$\lambda = \lambda_0 \iff \lambda_1 = \lambda_{01}, \lambda_2 = \lambda_{02}, \dots, \lambda_k = \lambda_{0k}$$

此时

$$\xi_0(t, q, \lambda_0) = t$$

$$\xi_\alpha(t, q, \lambda) = q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

坐标变换必须是**可微变换**，即变换的雅可比矩阵存在（不能趋于无穷大）；同时变换是非奇异的，雅可比行列式不为零。

作用量完全描述了拉格朗日系统的动力学性质，因此我们定义：在变换后，能保持作用量不变的无穷小时空坐标变换，称为**对称变换**。

¹ Emmy Noether; Mort Tavel (translator) (1971). "Invariant Variation Problems". *Transport Theory and Statistical Physics* 1 (3): 186–207. doi:10.1080/00411457108231446. (Original in *Gott. Nachr.* 1918:235–257)

无穷小的时空坐标变换的变换参数是

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \Delta\lambda_i, \quad \Delta\lambda_i = \epsilon_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

在无穷小变换下，时空坐标的变化 Δt 和 Δq_α 均为一阶无穷小量，

$$t' = \xi_0(t, q, \lambda) = t + \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \epsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} t + \Delta t \Rightarrow \Delta t = \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \epsilon_i$$

$$q'_\alpha = \xi_\alpha(t, q, \lambda) = q_\alpha + \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \epsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} q_\alpha + \Delta q_\alpha \Rightarrow \Delta q_\alpha(t) = \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \epsilon_i$$

如果上述变换是对称变换，按定义即要求

$$\forall(t, q_\alpha), \quad S(\lambda) = S(\lambda_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

其中变换前的作用量 $S(\lambda_0)$ 和变换后的作用量 $S(\lambda)$ 是

$$S(\lambda_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t=t_1}^{t=t_2} L(t, q, \dot{q}) dt, \quad S(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t'=t'_1}^{t'=t'_2} L(t', q', \frac{dq'}{dt'}) dt'$$

对称变换的等式需要对所有 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 和所有轨迹 $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 都成立。

如果用变分法的语言来表达就是：在这个给定的时空坐标全变分下，作用量的全变分为零，

$$\Delta S[q] = 0$$

那么这个变换就是对称变换。

对称变换的一些等价条件，会比定义本身更方便实际应用。

推论 对称变换的等价条件是：

①拉氏函数满足

$$L'(t, q, \dot{q}) \equiv L(t, q, \dot{q})$$

其中 L' 的定义是

$$L'(t, q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt}$$

②法夫形式

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(Ldt) = L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) dt' - L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt \equiv 0$$

③作为特例，如果没有时间膨胀， $dt' = dt$ ，则拉氏量保持不变

$$L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) = L\left(t, q', \frac{dq'}{dt}\right)$$

是对称变换的等价条件。

证明：把变换后的泛函 $S(\lambda)$ 的积分变量 t' 代换成 t ，

$$S(\lambda) = \int_{t'=t'_1}^{t'=t'_2} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) dt' = \int_{t'=t'_1}^{t'=t'_2} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt} dt = \int_{t=t_1}^{t=t_1} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt} dt$$

记

$$L'(t, q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt}$$

则有

$$S(\lambda) = \int_{t=t_1}^{t=t_1} L'(t, q, \dot{q}) dt$$

上式可以这样理解：时空坐标的变换，可以等价地看成是——时空坐标不变、但是拉氏函数的映射规则发生了变化。

取无穷小的积分区间，

$$t_1 \rightarrow t, \quad t_2 \rightarrow t + \epsilon$$

作用量不变的要求等价于

$$S(\lambda) = S(\lambda_0) \iff L'(t, q, \dot{q})dt = L(t, q, \dot{q})dt \iff L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q})$$

反之，如果

$$L'(t, q, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q})$$

成立，显然有 $S(\lambda) = S(\lambda_0)$ ，是对称变换。

对①两边乘以 dt 可得推论②，对①的结论取 $dt'/dt = 1$ 即得推论③。

拉氏函数具有不确定性。要保持运动方程不变，其实只要保持作用量的变分 δS 不变就可以了。因此，我们把前文定义对称变换的条件放宽，改成

$$\delta S(\lambda) \equiv \delta S(\lambda_0)$$

满足此条件的时空坐标变换，称之为（无穷小）**准对称变换**。有些文献不引入准对称这个名词，统称为对称变换。

推论：一个坐标变换是准对称变换的等价条件是：

①存在时空变量的函数 $\varphi(t, q, \lambda)$ ，满足

$$L'(t, q, \dot{q}) \equiv L(t, q, \dot{q}) + \frac{d\varphi(t, q, \lambda)}{dt}$$

②法夫形式

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(Ldt) = L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) dt' - L(t, q, \dot{q})dt$$

强可积²，

$$d\omega = 0$$

证明：

①坐标变换前后的作用量分别为

$$S(\lambda_0) = \int_{t=t_1}^{t=t_2} L(t, q, \dot{q})dt$$

$$S(\lambda) = \int_{t'=t'_1}^{t'=t'_2} L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt} dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} L'(t, q, \dot{q})dt$$

所以准对称满足的条件 $\delta S(\lambda) \equiv \delta S(\lambda_0)$ 就是

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \frac{\partial L'}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} \delta q_\alpha dt = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} \delta q_\alpha dt$$

上式中的边界项，已经利用哈密顿变分的条件 $\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$ 消去。

拉氏函数 L 和 L' 给出完全一样的拉格朗日方程，根据第二章附录中的证明，必有

$$L'(t, q, \dot{q}) \equiv L(t, q, \dot{q}) + \frac{d\varphi(t, q, \lambda)}{dt}$$

②这一条件等价也可以写成

² 这里的“可积”指强可积，不同于 Frobenius 定理中的可积性定义。乘以积分因子后才存在原函数这种情况，不符合判别准对称的要求。

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(Ldt) = d\varphi(t, q, \lambda)$$

即法夫形式 ω 强可积, $d\omega = 0$ 。

例 对抛物运动, 取抛物线所在平面的直角坐标系, 以向上为正 y -轴。拉氏函数是

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

则 x -方向的平移

$$t' = t, \quad x' = x + a, \quad y' = y$$

是对称变换:

$$\begin{aligned} L(t', x', y', \dot{x}', \dot{y}') dt' &= \left\{ \frac{1}{2}m \left(\frac{d(x+a)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \right\} dt = \left\{ \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right\} dt \\ &= L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt \end{aligned}$$

但是 y -方向的平移

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y + b$$

不是对称变换, 而是准对称变换:

$$\begin{aligned} L \left(t', x', y', \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'} \right) dt' &= \left\{ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{d(y+b)}{dt} \right)^2 - mg(y+b) \right\} dt \\ &= \left\{ \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(y+b) \right\} dt = L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt - mgb dt \end{aligned}$$

最后一项可积,

$$\varphi(t, x, y, b) = -mgbt$$

2. 诺特定理

把无穷小准对称变换在恒等变换附近展开,

$$\Delta t = t' - t = \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \epsilon_i, \quad \Delta q_\alpha(t) = q'_\alpha(t') - q_\alpha(t) = \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \epsilon_i$$

另外, 记

$$\Delta\varphi(t, q) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t, q, \lambda_0 + \epsilon) - \varphi(t, q, \lambda_0) = \left(\epsilon_i \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

注意记号 $\Delta\varphi$ 不是全变分, 并且 $\varphi(t, q, \lambda_0) = 0$ 。

按准对称变换的定义,

$$\Delta\varphi(t, q) \Big|_{t_1}^{t_2} = S(\lambda) - S(\lambda_0) = \Delta S$$

而作用量的全变分是

$$\Delta S = \Delta \int_{t=t_1}^{t=t_2} L(t, q, \dot{q}) dt = (-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt$$

当系统在时间段 (t_1, t_2) 内按真实轨迹运动时, 需要满足拉格朗日方程, 所以有

$$(-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

$$(-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi) \Big|_{t_1} = (-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi) \Big|_{t_2}$$

由于 t_1, t_2 可以任意选定, 故而

$$-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi = \text{常数}$$

不随时间变化。

把 $\Delta t, \Delta q_\alpha, \Delta \varphi$ 代入上式，再由无穷小量的任意性，最终得

$$\boxed{-H \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} + p_\alpha \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0}}$$

是诺特守恒量。

3. 例题

例 广义动量积分和广义能量积分

如果拉氏量不依赖于某个广义坐标 q_α ，考虑无穷小的空间平移变换，

$$\Delta t = 0$$

$$\begin{cases} \Delta q_\alpha = \epsilon, \\ \Delta q_\beta = 0, \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$$

在此变换下，

$$\begin{aligned} t' &= t, & dt' &= dt \\ q'_\alpha &= q_\alpha + \epsilon, & q'_\beta &= q_\beta \\ \frac{dq'_\alpha}{dt'} &= \frac{d(q_\alpha + \epsilon)}{dt} = \frac{dq_\alpha}{dt}, & \frac{dq'_\beta}{dt'} &= \frac{dq_\beta}{dt} \end{aligned}$$

另外

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

因此有

$$L \left(t', q', \frac{dq'}{dt'} \right) dt' = L \left(t, q, \frac{dq}{dt} \right) dt, \quad \omega = \Delta(Ldt) = 0$$

即 q_α 的平移是对称变换。

根据诺特定理，

$$-H\Delta t + p_\gamma \Delta q_\gamma = -H \cdot 0 + p_\alpha \epsilon = p_\alpha \epsilon = \text{constant}$$

广义动量 p_α 是守恒量。

若拉氏函数不依赖于时间 t ，则时间平移

$$\begin{aligned} t' &= t + \epsilon \\ q'_\alpha &= q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

是对称变换：

$$L \left(t', q', \frac{dq'}{dt'} \right) dt' = L \left(t + \epsilon, q, \frac{dq}{d(t + \epsilon)} \right) d(t + \epsilon) = L \left(t + \epsilon, q, \frac{dq}{dt} \right) dt = L \left(t, q, \frac{dq}{dt} \right) dt$$

由诺特定理，广义能量守恒，

$$-H\epsilon + \text{constant} = -E$$

例 对抛物运动的例子， y -方向的平移是准对称变换，

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0, & \Delta x &= 0, & \Delta y &= \epsilon \\ \Delta \varphi &= \left[\frac{\partial}{\partial b} (-mgbt) \right] \Big|_{b=0} \epsilon = -\epsilon mgt \end{aligned}$$

广义坐标和广义能量是

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}$$

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

所以诺特守恒量是

$$-H\Delta t + p_x\Delta x + p_y\Delta y - \Delta\varphi = m\dot{y}\epsilon + \epsilon mgt$$

即

$$A = \dot{y} + gt$$

守恒。令 $t = 0$ ，得守恒量的取值是

$$A = \dot{y}(0)$$

例 粒子在势场 $V(\vec{x})$ 中运动，作用势是坐标的齐次函数，

$$V(\alpha\vec{x}) = \alpha^{-2}V(\vec{x}), \quad L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$$

考虑尺度变换

$$\vec{x}'(t') = \lambda\vec{x}(t), \quad t' = \lambda^2 t$$

有

$$L\left(t', \vec{x}'(t'), \frac{d\vec{x}'(t')}{dt'}\right) dt' = \left\{ \frac{1}{2}m \left(\frac{d\vec{x}'(t')}{dt'} \right)^2 - V(\vec{x}'(t')) \right\} dt'$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}m \left(\frac{\lambda d\vec{x}(t)}{\lambda^2 dt} \right)^2 - \lambda^{-2}V(\vec{x}(t)) \right\} \lambda^2 dt = \left\{ \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \right\} dt = L\left(t, \vec{x}(t), \frac{d\vec{x}(t)}{dt}\right) dt$$

是对称变换。

无穷小变换为

$$\lambda = 1 + \epsilon$$

$$t' = (1 + \epsilon)^2 t = t + 2\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \Delta t = 2\epsilon t$$

$$\vec{x}'(t') = (1 + \epsilon)\vec{x}(t), \quad \Delta\vec{x} = \epsilon\vec{x}$$

所以有

$$-H\Delta t + \vec{p} \cdot \Delta\vec{x} = -\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}) \right) \cdot 2\epsilon t + m\dot{\vec{x}} \cdot \epsilon\vec{x} = \epsilon \{ m\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x} - m\dot{\vec{x}}^2 t - 2V(\vec{x})t \}$$

于是诺特守恒量是

$$A = m\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x} - m\dot{\vec{x}}^2 t - 2V(\vec{x})t$$

作为印证，我们可以把运动方程代入 dA/dt 的表达式，检验其是否为零。

经典力学中的诺特守恒量，一般来说在量子力学中仍然守恒。

不过经典力学的第一原理是最小作用量原理 $\delta S[q] = 0$ ；而在量子力学中，波函数叠加时需要计算路径积分

$$\int e^{\frac{iS[q]}{\hbar}} [\mathcal{D}q]$$

如果路径积分的测度 $[\mathcal{D}q]$ 在对称变换下改变了，则经典守恒量不是量子守恒量，这种现象称为**反常**（Anomaly）。

二、 寻找对称性

一个自由度为 n 的非奇异拉格朗日系统，总共有 $2n$ 个独立的守恒量。每个守恒量都有相应的对称变换。

问题是：对于给定的拉氏函数，有什么方法寻找此系统的对称变换？

(1) 有些对称性是在构建模型时已知的，这时写出的拉氏量必然存在这些对称变换。例如，对称陀螺存在一个对称轴，一定具有绕轴转动的对称性。

(2) 还有一些对称性，可以从拉氏函数的协变性得到。只要 Ldt 是标量（零阶张量），那么必然在坐标变换下不变。例如，当拉氏量是三维笛卡尔标量时，系统具有转动对称性；当 Ldt 是洛伦兹标量时，齐次洛伦兹变换必然是对称变换。

(3) 如果只是已知拉氏函数，但是不存在循环坐标，也没有其它的先验知识，想要找到系统的对称性，就只能按照对称变换的定义去求解。

无穷小的时空坐标变换可以写成

$$t' = \xi_0(t, q, \epsilon) \approx t + \epsilon \eta_0(t, q), \quad q'_\alpha(t') = \xi_\alpha(t, q, \epsilon) \approx q_\alpha(t) + \epsilon \eta_\alpha(t, q)$$

其中

$$\eta_0(t, q) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \xi_0(t, q, \lambda)}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad \eta_\alpha(t, q) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \xi_\alpha(t, q, \lambda)}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

是可微变换的无穷小生成元。这时有

$$\begin{aligned} \Delta t &= \epsilon \eta_0(t, q), & \Delta q_\alpha &= \epsilon \eta_\alpha(t, q) \\ \Delta \dot{q}_\alpha &= \frac{dq'_\alpha(t')}{dt'} - \frac{dq_\alpha(t)}{dt} \\ &= \frac{d\{q_\alpha(t) + \epsilon \eta_\alpha(t, q)\}}{d\{t + \epsilon \eta_0(t, q)\}} - \frac{dq_\alpha(t)}{dt} \\ &= \frac{dq_\alpha(t)}{d\{t + \epsilon \eta_0(t, q)\}} + \epsilon \frac{d\eta_\alpha}{d\{t + \epsilon \eta_0(t, q)\}} - \frac{dq_\alpha(t)}{dt} \\ &= \frac{dq_\alpha(t)/dt}{d\{t + \epsilon \eta_0(t, q)\}/dt} + \epsilon \frac{d\eta_\alpha/dt}{d\{t + \epsilon \eta_0(t, q)\}/dt} - \frac{dq_\alpha(t)}{dt} \\ &= \frac{\dot{q}_\alpha}{1 + \epsilon \frac{d\eta_0}{dt}} + \epsilon \frac{d\eta_\alpha}{dt} \frac{1}{1 + \epsilon \frac{d\eta_0}{dt}} - \dot{q}_\alpha \\ &= -\epsilon \dot{q}_\alpha \frac{d\eta_0}{dt} + \epsilon \frac{d\eta_\alpha}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

代入对称变换的充分必要条件

$$L\left(t', q', \frac{dq'}{dt'}\right) \frac{dt'}{dt} - L(t, q, \dot{q}) = 0$$

要求生成元 $\eta_0(t, q)$ 和 $\eta_\alpha(t, q)$ 满足：

$$L \frac{d\eta_0}{dt} + \eta_0 \frac{\partial L}{\partial t} + \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \left(\frac{d\eta_\alpha}{dt} - \dot{q}_\alpha \frac{d\eta_0}{dt} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

利用这个偏微分方程，可以解出对称变换的生成元。不过求解这个方程通常比较困难，有时比直接求解运动方程还要复杂。

例 考虑一维拉格朗日系统，

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2x^2}$$

对称变换的生成元满足

$$L \frac{d\eta_0}{dt} - \frac{1}{x^3} \eta_1 + \left(\frac{d\eta_1}{dt} - \dot{x} \frac{d\eta_0}{dt} \right) \dot{x} = 0$$

守恒量的函数仍然是守恒量，表达式可以有无穷多种，上述方程必然不足以定解。

尝试额外附加一些约定，令

$$\eta_1(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} x$$

这样方程化简成了

$$\begin{aligned} L \frac{d\eta_0}{dt} - \frac{1}{x^2} + \left(\dot{x} - \dot{x} \frac{d\eta_0}{dt} \right) \dot{x} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(-\dot{x}^2 + \frac{1}{x^2} \right) \frac{d\eta_0}{dt} - \frac{1}{x^2} + \dot{x}^2 &= 0 \end{aligned}$$

解出

$$\eta_0 = 2t$$

所以我们找到的无穷小对称变换是

$$\Delta t = \epsilon \eta_0 = 2\epsilon t, \quad \Delta x = \epsilon \eta_1 = \epsilon x$$

这个对称变换对应的诺特守恒量是

$$-H\eta_0 + p\eta_1 = -\left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2x^2} \right) \cdot 2t + \dot{x}x = \left(\frac{1}{x^2} - \dot{x}^2 \right) t + \dot{x}x$$

三、 伽利略相对性原理和牛顿力学

1. 牛顿时空观和伽利略变换

在所著的《自然哲学的数学原理》一书中，牛顿认为：

- ①时间与空间的度量，与惯性参照系的运动状态无关。
- ②在不同惯性参照系中观察到的力学量，通过伽利略变换相联系。
- ③力学规律在伽利略变换下是不变，满足伽利略协变性。

什么是伽利略协变性？

牛顿力学讨论的是质点组。质点是没有内部结构的几何点。质点组的直角坐标记作 $\{\vec{x}_a | a = 1, 2, \dots, N\}$ ，在另一个参考系，系统的坐标是 $\{\vec{x}'_a | a = 1, 2, \dots, N\}$ 。两者之间相差一个伽利略变换，

$$\begin{cases} t' = t + t_0 \\ \vec{x}' = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + R(\vec{\psi}) \vec{x} \end{cases}$$

伽利略变换依赖于 10 个参数：时间平移参数 t_0 ，空间平移参数 $\vec{x}_0$ ，空间转动的角位移参数 $\vec{\psi}$ ，以及伽利略推动的参数 $\vec{v}_0$ （两个参考系之间的相对速度）。

牛顿力学以三大定律为公理，其它定理都是推论。伽利略协变性只是众多推论中的一个。

但是实际上，物理学家们都认为，即使牛顿力学需要修改，能量守恒、动量守恒这些守恒定律也不可能被违反，因为这些守恒定律是时空的性质。

时空的几何性质，比具体的物理模型更重要、也更基础。

时空的对称性，理应作为第一性的原理，也就是最基本的公理假设，而不是其它物理定律的推论。

下面我们基于两个基本假设：

①最小作用量原理

②伽利略变换是准对称变换（即伽利略相对性原理）

来重构整个牛顿力学的理论框架，牛顿三大定律不再被当作基本假设或已知的结论。

2. 单个质点的拉格朗日函数

先考虑单个质点运动。

设系统的作用量是积分型泛函

$$S[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

其中拉格朗日函数是一阶的，即

$$L = L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

作为封闭系统，拉氏函数满足伽利略协变性。

①时间平移是对称变换这个条件，要求拉氏函数满足

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \implies L = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

②空间平移是对称变换的条件，要求

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \implies L = L(\dot{\vec{x}})$$

③转动是对称变换，要求

$$L = L(\dot{\vec{x}}^2)$$

④最后，我们要求伽利略推动是准对称变换，那么

$$L((\dot{\vec{x}} + \vec{\epsilon})^2) dt - L(\dot{\vec{x}}^2) dt = df(t, \vec{x})$$

$$\text{L. H. S.} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}^2} 2d\vec{x} \cdot \vec{\epsilon}, \quad \text{R. H. S.} = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x}$$

方程右边的系数 $\partial f / \partial \vec{x}$ 是时空坐标的函数，而左边的系数 $\partial L / \partial \dot{\vec{x}}^2$ 却是速度的函数，只能有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}^2} = 0$$

所以拉氏函数³是

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2, \quad m \in \mathbb{R}$$

⑤一个稳定的物理系统，其能量必须有底，故有

$$H = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 \geq 0$$

而 $m = 0$ 的情形不能描述任何运动，因此质点的质量 m 必须为正数。

至此，我们从牛顿时空的几何（对称性），得出了质点运动的唯一模型，

³ 这里我们对时空平移和转动对称性提了一个很强的要求——拉氏函数的形式能够使得这些变换是对称变换。如果只要求伽利略变换是准对称变换，经过推理，能够得到相同的结论（不过需要数页的推导）。

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + \frac{df(t, \vec{x})}{dt}$$

其中的纯规范项 $df(t, \vec{x})/dt$ 可以省略。

3. 质点组的拉格朗日函数

力学系统由质点组成。拉氏函数具有可加性，所以质点组的拉氏函数是

$$L(t, \vec{x}_a, \dot{\vec{x}}_a) = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{x}}_a^2 - V(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

其中 $V(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ 是质点之间的多体相互作用。这里我们暂不考虑依赖于速度的广义势。

要求封闭的质点组系统满足伽利略协变性：

(1) 时间平移

在无穷小的时间平移变换下，

$$\begin{aligned} \Delta t &= \epsilon, & \Delta \vec{x}_a &= \vec{0} \\ \Rightarrow \Delta \dot{\vec{x}}_a &= \frac{d\vec{x}'_a(t')}{dt'} - \frac{d\vec{x}_a(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}'_a(t') - d\vec{x}_a(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \Delta \vec{x}_a = \vec{0} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta(Ldt) &= L\left(t', \vec{x}'_a, \frac{d\vec{x}'_a}{dt'}\right) dt' - L(t, \vec{x}_a, \dot{\vec{x}}_a) dt = [-V(t', \vec{x}'_a(t')) + V(t, \vec{x}_a(t))] dt \\ &= [-V(t', \vec{x}_a(t)) + V(t, \vec{x}_a(t))] dt = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} dt \end{aligned}$$

①时间平移是准对称变换，即微分 1-形式 $\Delta(Ldt)$ 强可积，

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial V}{\partial t} dt\right) &= \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_{ai}} dx_{ai} \wedge dt = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_{ai}} &= 0, \quad a = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

这说明 $\partial V/\partial t$ 不依赖于任何一个质点的坐标，

$$\frac{\partial V}{\partial t} \equiv e(t)$$

上式对 t 积分，有

$$V \equiv E(t) + V_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$$

②根据诺特定理，无穷小守恒量是

$$-H\Delta t + \vec{p}_a \cdot \Delta \vec{x}_a + \int \epsilon e(t) dt = -\epsilon H + \epsilon E(t)$$

去掉 ϵ ，诺特守恒量是

$$H - E(t) = T + V - E(t) = T + V_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$$

这里的 $E(t)$ 是纯规范项，作规范变换

$$L \rightarrow L + E(t)$$

就可以消去 $E(t)$ 。由于没有实际物理效应，可以选择 $E(t) = 0$ 而不改变系统的性质。

③总之有

$$\text{力学系统具有时间平移不变性} \iff \partial V/\partial t = 0$$

这时机械能 $T + V$ 守恒。

(2) 空间平移

在无穷小的空间平移变换下，

$$\Delta t = 0, \quad \Delta \vec{x}_a = \vec{\epsilon} \Rightarrow \Delta \dot{\vec{x}}_a = \vec{0}$$

于是

$$\Delta(Ldt) = L\left(t', \vec{x}'_a, \frac{d\vec{x}'_a}{dt'}\right) dt' - L(t, \vec{x}_a, \dot{\vec{x}}_a) dt = - \sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} \cdot \vec{\epsilon} dt = \vec{\epsilon} \cdot \vec{F} dt$$

其中

$$\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a}$$

是系统受到的合力。

①空间平移是准对称变换，即要求上式强可积，

$$d\Delta(Ldt) = d(d\varphi) = 0$$

于是

$$\begin{aligned} d(\vec{\epsilon} \cdot \vec{F} dt) &= \epsilon_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{aj}} dx_{aj} \wedge dt = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_{aj}} &= 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}(t) \end{aligned}$$

合力只是时间的函数，是空间平移不变的充要条件。

②对应的无穷小诺特守恒量是

$$-H\Delta t + \vec{p}_a \cdot \Delta \vec{x}_a - \int \vec{\epsilon} \cdot \vec{F}(t) dt = \vec{\epsilon} \cdot \sum_a \vec{p}_a - \vec{\epsilon} \cdot \int \vec{F}(t) dt$$

去掉无穷小因子，守恒量为

$$\sum_a \vec{p}_a - \int \vec{F}(t) dt = \text{constant}$$

③把上式对时间求导，得**动量定理**：

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(t)$$

其中 $\vec{P}$ 是质点组的**总动量**，

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_a \vec{p}_a$$

因此，

力学系统具有空间平移不变性 $\Leftrightarrow$ 合力 $\vec{F} = \vec{F}(t)$

这时动量定理成立。

(3) 空间转动

考虑无穷小的转动，

$$\Delta t = 0, \quad \Delta \vec{x}_a = \epsilon \vec{n} \times \vec{x}_a(t)$$

$$\Rightarrow \Delta \dot{\vec{x}}_a = \frac{d\vec{x}'_a(t')}{dt'} - \frac{d\vec{x}_a(t)}{dt} = \frac{d\Delta \vec{x}_a}{dt} = \epsilon \vec{n} \times \dot{\vec{x}}_a$$

$$\Delta \dot{\vec{x}}_a^2 = 2\dot{\vec{x}}_a \cdot \Delta \dot{\vec{x}}_a = 2\dot{\vec{x}}_a \cdot (\epsilon \vec{n} \times \dot{\vec{x}}_a) = 2\epsilon \vec{n} \cdot (\dot{\vec{x}}_a \times \dot{\vec{x}}_a) = 0$$

代入拉氏函数得

$$\Delta(Ldt) = L\left(t', \vec{x}'_a, \frac{d\vec{x}'_a}{dt'}\right) dt' - L(t, \vec{x}_a, \dot{\vec{x}}_a) dt = - \sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} \cdot \epsilon (\vec{n} \times \vec{x}_a) dt$$

$$= \epsilon \vec{n} \cdot \sum_a (\vec{x}_a \times \vec{F}_a) dt = \epsilon \vec{n} \cdot \vec{M} dt$$

其中

$$\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_a (\vec{x}_a \times \vec{F}_a)$$

是合力矩。

①转动是准对称变换，即 $\Delta(Ldt)$ 强可积，

$$\begin{aligned} d(\Delta(Ldt)) &= 0 \\ d(\epsilon \vec{n} \cdot \vec{M} dt) &= \epsilon n_i \frac{\partial M_i}{\partial x_{aj}} dx_{aj} \wedge dt = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial M_i}{\partial x_{aj}} &= 0, \quad a = 1, 2, \dots, N; i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

也就是说，合力矩不依赖于空间坐标 x_{aj} ，仅仅是时间的函数，

$$\vec{M} = \vec{M}(t)$$

②这时无穷小诺特守恒量是

$$-H\Delta t + \vec{p}_a \cdot \Delta \vec{x}_a - \int \epsilon \vec{n} \cdot \vec{M}(t) dt = \epsilon \vec{n} \cdot \sum_a (\vec{x}_a \times m_a \dot{\vec{x}}_a) - \epsilon \vec{n} \cdot \int \vec{M}(t) dt$$

式子中的第一项是总角动量，

$$\vec{J} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_a \vec{x}_a \times m_a \dot{\vec{x}}_a$$

因此守恒量实际上是

$$\vec{J} - \int \vec{M}(t) dt = \text{常数}$$

③把上式左右两边一起对时间求导，得角动量定理

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}$$

综合前面的讨论，

力学系统具有空间各向同性（转动不变） $\iff$ 合力矩 $\vec{M} = \vec{M}(t)$
这时角动量定理成立。

（4）伽利略推动

两个参考系的相对速度为无穷小量 $\vec{\epsilon}$ ，那么

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0, \quad \Delta \vec{x}_a = \vec{\epsilon} t \\ \Rightarrow \Delta \dot{\vec{x}}_a &= \frac{d\vec{x}'_a(t')}{dt'} - \frac{d\vec{x}_a}{dt} = \frac{d\Delta \vec{x}_a}{dt} = \vec{\epsilon} \end{aligned}$$

代入拉氏函数，

$$\begin{aligned} L' &= \sum_a \frac{1}{2} m_a (\dot{\vec{x}}_a + \vec{\epsilon})^2 - V(t, \vec{x}_1 + \vec{\epsilon} t, \dots, \vec{x}_N + \vec{\epsilon} t) \\ &= \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{x}}_a^2 + \vec{\epsilon} \cdot \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a + \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_a m_a - V(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) - t\vec{\epsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} \\ &= L + \vec{\epsilon} \cdot \frac{d}{dt} \sum_a m_a \vec{x}_a - t\vec{\epsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} + \mathcal{O}(\epsilon)^2 \end{aligned}$$

$$\Delta(Ldt) = L'dt - Ldt = \vec{\epsilon} \cdot \sum_a m_a d\vec{x}_a - t\vec{\epsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} dt$$

取外微分得

$$d(\Delta(Ldt)) = \vec{\epsilon} \cdot \left(-t \sum_{a,b} \frac{\partial^2 V}{\partial \vec{x}_a \partial x_{bj}} dx_{bj} \wedge dt \right) = \vec{\epsilon} \cdot \left(t \sum_b \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_{bj}} dx_{bj} \wedge dt \right)$$

①法夫形式 $\Delta(Ldt)$ 强可积条件是

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_{bj}} = \vec{0}, \quad b = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, 3.$$

也就是说, 当合力与坐标无关, 仅为时间的函数时,

$$\vec{F} = - \sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} = \vec{F}(t)$$

伽利略推动是准对称变换。

②伽利略推动对应的无穷小守恒量是

$$-H\Delta t + \vec{p}_a \cdot \Delta \vec{x}_a - \Delta \varphi = \vec{\epsilon} \cdot \left(t \sum_a \vec{p}_a - \sum_a m_a \vec{x}_a - \int t \vec{F}(t) dt \right) = \vec{\epsilon} \cdot \left(\vec{P}t - M\vec{x}_C - \int t \vec{F}(t) dt \right)$$

去掉无穷小常数, 诺特守恒量为

$$\vec{P}t - M\vec{x}_C - \int t \vec{F}(t) dt = \text{常数}$$

其中 $\vec{P}, M, \vec{x}_C$ 分别是质心动量、总质量和质心坐标,

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_a m_a, \quad \vec{x}_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_a m_a \vec{x}_a$$

③总之,

力学系统在伽利略推动变换下不变 $\iff$ 合力 $\vec{F} = \vec{F}(t)$

这时 $\vec{P}t - M\vec{x}_C - \int t \vec{F}(t) dt$ 是守恒量。

4. 惯性参考系

一般来说, 在任意参考系, 合力 $\vec{F}(t)$ 与合力矩 $\vec{M}(t)$ 非零。我们把满足

$$\vec{F}(t) = \vec{0}, \quad \vec{M}(t) = \vec{0}$$

的参考系, 定义为**惯性参考系**。

对于惯性系中的封闭体系, 以①最小作用量原理, 和②伽利略协变性作为基本假设, 根据前面的推导, 我们已证明了牛顿力学中的主要定理成立:

①势函数 $V \equiv V_0(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$, 机械能 $H = T + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ 守恒;

②总动量守恒;

③总角动量守恒;

④质心运动定理成立,

$$\vec{P}t - M\vec{x}_C = \text{常数} \iff \vec{x}_C = \frac{\vec{P}}{M}t + \vec{x}_C(0)$$

四、洛伦兹协变性与相对论力学

1. 狭义相对论与闵可夫斯基 (MINKOWSKI) 时空

狭义相对论基于两个假设⁴，相对性原理和光速不变原理：

1. *The Principle of Relativity: The laws by which the states of physical systems undergo change are not affected, whether these changes of state be referred to the one or the other of two systems of coordinates in uniform translatory motion.*

2. *The Principle of the Constancy of the Velocity of Light: Any ray of light moves in the "stationary" system of coordinates with the determined velocity c , whether the ray be emitted by a stationary or a moving body.*

相对论的时空是闵氏时空。时空坐标是四矢量 (four-vector)，

$$x = (x^\mu) = (t, x, y, z), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

这里使用自然单位制 $c = 1$ 。

闵氏时空的度规张量是

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu})$$

降指标后得到逆变矢量，

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu, \quad (x_\mu) = (t, -x, -y, -z)$$

两个四矢量的内积是

$$a \cdot b = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3 = a^0b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

而时空间隔的平方为

$$(x - y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$$

元时 (固有时) 的平方是

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

时空间隔是闵氏几何的不变量。

2. 闵可夫斯基时空的对称性——庞加莱变换*

保持闵氏时空中任意两点的时空间隔都不变的变换，必为非齐次线性变换，

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

称为非齐次洛伦兹变换，又称为庞加莱变换 (Poincaré transformation)。

庞加莱变换共有 10 个参数。 a^μ 是平移参数， $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$ 是洛伦兹变换矩阵，并且满足

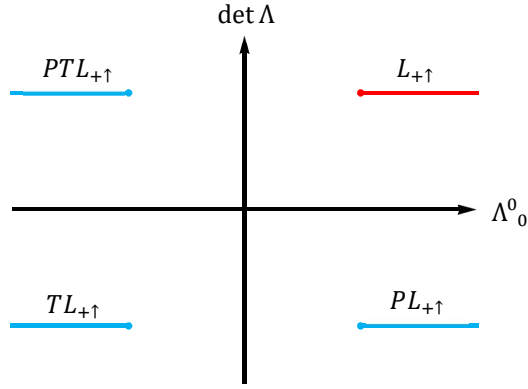
$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

其中

$$\det \Lambda = +1, \quad \Lambda^0_0 > 0$$

的齐次线性变换称为恰当顺时洛伦兹变换 (proper orthochronous Lorentz transformation, $L_{+\uparrow}$)。

⁴ A. Einstein (1905), On the Electrodynamics of Moving Bodies, Annalen der Physik, 17. Translated in Einstein, Lorentz, Minkowski and Weyl (1923).



恰当顺时洛伦兹变换包括了恒等变换，并且不改变坐标系的手征，能够通过连续运动实现。有 6 个参数，空间转动 3 个，洛伦兹推动 3 个。

例如，沿坐标轴的纯推动（Lorentz pure boost）变换矩阵是

$$L_x(v) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y(v) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & \sinh \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_z(v) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \cosh \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

其中 η 是变换的参数（快度）， γ 是洛伦兹因子⁵，

$$\tanh \eta \stackrel{\text{def}}{=} v \in (-1, 1) \Rightarrow \cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \sinh \eta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

在沿 x 轴的推动下，时空坐标的变换关系是

$$x'^{\mu} = [L_x(v)]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{vx}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x' = \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

对于静止于坐标原点的粒子，

$$\vec{x}(t) = \vec{0}$$

在变换后成为

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x' = \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = v$$

可见我们这里采用的是“主动变换”（active transformation）。

取光速 $c \rightarrow +\infty$ 的极限，保留到一阶无穷小，即 $\mathcal{O}(v)$ 以及 $\mathcal{O}(x/t)$ 项，得

⁵ 洛伦兹变换参数 $|v| < 1$ ，说明不存在 $|v| \geq 1$ 的超光速变换。

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx t$$

$$x' = \frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx x + vt$$

因此庞加莱变换的低速极限，是伽利略变换。

绕坐标轴转动的矩阵是

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 单粒子的拉氏函数

对于闵氏时空中的质点，基于闵氏时空的几何性质——洛伦兹协变性，下面我们来寻找系统的拉格朗日函数。

单粒子运动的时空轨迹，又称为**世界线**（world line），可以记为

$$x^\mu = x^\mu(\lambda), \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

这里 λ 是形式参数，仅起到保证世界线是连续轨迹的作用，没有其它物理意义。

根据最小作用量原理，作用量是积分型泛函。

设拉氏函数不依赖于 x^μ 对 λ 的2阶以上的导数，作用量是积分型泛函

$$S[x] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\lambda, x, \dot{x}) d\lambda$$

其中 $\dot{x}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} dx^\mu/d\lambda$ 。

4. 参数不变性

形式参数只能有拓扑意义，改变其定义不产生实际影响。

先考虑 λ 的平移，

$$\lambda' = \lambda + \epsilon, \quad x'^\mu(\lambda') = x^\mu(\lambda)$$

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(Ld\lambda) = L\left(\lambda', x'(\lambda'), \frac{dx'(\lambda')}{d\lambda'}\right) d\lambda' - L(\lambda, x, \dot{x}) d\lambda = \epsilon \frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x})}{\partial \lambda} d\lambda$$

形参平移不变，要求

$$d\omega = 0 \iff \exists f(\lambda, x), \quad \frac{\partial L(\lambda, x, \dot{x})}{\partial \lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df(\lambda, x)}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu$$

令

$$\varphi(\lambda, x) \stackrel{\text{def}}{=} L|_{\dot{x}=0}, \quad A_\mu(\lambda, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \Big|_{\dot{x}=0}$$

$$L_0(\lambda, x, \dot{x}) \stackrel{\text{def}}{=} L(\lambda, x, \dot{x}) - \varphi(\lambda, x) - A_\mu(\lambda, x) \dot{x}^\mu$$

拉氏函数是

$$L(\lambda, x, \dot{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\lambda, x) + A_\mu(\lambda, x) \dot{x}^\mu + L_0(\lambda, x, \dot{x})$$

其中的 L_0 满足

$$L_0|_{\dot{x}=0} = 0, \quad \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^\mu} \Big|_{\dot{x}=0} = 0$$

于是可积条件成为

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial A_\mu}{\partial \lambda} \dot{x}^\mu + \frac{\partial L_0}{\partial \lambda} \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu$$

对上式取 $\dot{x}^\mu = 0$ ，得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

取 $\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \Big|_{\dot{x}=0}$ ，得

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

总之有

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L_0}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow L_0 = L_0(x, \dot{x})$$

另外，利用

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \varphi + A_\mu \dot{x}^\mu \} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu = \frac{df}{d\lambda}$$

再结合洛伦兹不变性，可以证明（过程很繁琐，略）

$$\varphi + A_\mu \dot{x}^\mu \equiv \frac{dg(\lambda, x)}{d\lambda}$$

是纯规范项，所以

$$L = L_0(x, \dot{x}) + \frac{dg(\lambda, x)}{d\lambda}$$

总存在一个规范选择，使得规范项为零，拉氏函数的形式为

$$L = L_0(x, \dot{x})$$

再来考虑对形式参数作更一般的连续变换。取 $\lambda = \lambda(\tau)$ 是单调函数，且映射保持两端不动

$$\lambda(\tau_1) = \lambda_1 = \tau_1, \quad \lambda(\tau_2) = \lambda_2 = \tau_2$$

要求作用量不变，

$$\int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} L_0 \left(x, \frac{dx}{d\lambda} \right) d\lambda \equiv \int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L_0 \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right) d\tau$$

得

$$\int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L \left(x, \frac{dx}{d\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau = \int_{\tau=\tau_1}^{\tau=\tau_2} L \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right) d\tau$$

由积分限的任意性，

$$L_0 \left(x, \frac{dx}{d\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \frac{d\lambda}{d\tau} = L_0 \left(x, \frac{dx}{d\tau} \right)$$

因为 $d\tau/d\lambda$ 可取任意非零实数 α ，拉氏函数必须满足

$$\frac{1}{\alpha} L_0(x, \alpha \dot{x}) \equiv L_0(x, \dot{x}), \quad \forall \alpha \neq 0$$

即要求拉氏函数是 $\dot{x}^\mu$ 的一次齐次函数。

5. 庞加莱不变性

时空平移不变要求（详细证明过于冗长，略）

$$L = L_0(\dot{x})$$

洛伦兹不变性要求 L_0 为 Lorentz 标量，

$$L = L_0(\dot{x}^2)$$

最后再由参数不变性，

$$L_0((\alpha\dot{x})^2) = \alpha L_0(\dot{x}^2), \quad \forall \alpha \neq 0$$

有三种可能：

①慢子，类时， $\dot{x}^2 > 0$ ，取 $\dot{x}^2 = 1$ 得

$$L_0(\alpha^2) = \alpha L_0(1), \quad \alpha \neq 0$$

拉氏函数是

$$L = L_0(\dot{x}^2) = m_1 \sqrt{\dot{x}^2}, \quad m_1 \in \mathbb{R}$$

②快子，类空， $\dot{x}^2 < 0$ ，取 $\dot{x}^2 = -1$ 得

$$L_0(-\alpha^2) = \alpha L_0(-1)$$

拉氏函数只能是

$$L = L_0(\dot{x}^2) = m_2 \sqrt{-\dot{x}^2}, \quad m_2 \in \mathbb{R}$$

③光速粒子，类光，取 $\dot{x}^2 = 0$ 得，

$$L_0(0) = \alpha L_0(0) \Rightarrow L_0(0) = 0$$

下面逐个讨论这三种情况。

6. 亚光速粒子

由条件

$$\dot{x}^2 = \frac{(\mathrm{d}\tau)^2}{(\mathrm{d}\lambda)^2} > 0$$

得

$$\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{x}^2 > 0 \iff \vec{v}^2 < 1, \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

粒子的速率小于光速。洛伦兹变换不改变固有时，因此粒子速率永远小于光速，称之为亚光速粒子或慢子（tardyon, bradyon）。

记 $m = -m_1$ ，作用量为（规范项对运动方程没有贡献，取为零）

$$S[x] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L \mathrm{d}\lambda = -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\dot{x}^2} \mathrm{d}\lambda = -m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu} = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau$$

可见作用量就是闵氏时空中世界线的弧长。

根据最小作用量原理，没有外力时，粒子沿测地线运动。

我们一般习惯以时间 t 为参量，广义坐标 $\vec{x}$ 被看作时间的函数，

$$\vec{x} = \vec{x}(t), \quad \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

作用量泛函的宗量为函数 $\vec{x}(t)$ ，

$$S[\vec{x}] = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau = -m \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{x}^2} = -m \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{1 - \vec{v}^2} \mathrm{d}t$$

拉氏函数是

$$L = -m \sqrt{1 - \vec{v}^2}$$

求得动量为

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \gamma m \vec{v}$$

其中洛伦兹因子是

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$$

广义能量是

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \gamma m$$

一个稳定的物理系统，能量必须有底，

$$H > 0 \implies m > 0$$

即质量 m 必须是正实数。

容易检验，动量和能量满足爱因斯坦质能关系

$$H^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

如果定义四维速度

$$v^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$$

由于

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{\sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \gamma$$

四速度可以写成

$$v^\mu = (\gamma, \gamma \vec{v})$$

定义四动量（four-momenta）

$$p^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (H, \vec{p}) = (\gamma m, \gamma m \vec{v}) = m v^\mu$$

四动量的模长是质量，

$$\sqrt{p^\mu p_\mu} = \sqrt{H^2 - \vec{p}^2} = m$$

质量是洛伦兹不变量。

利用惯性系的变换是恰当顺时洛伦兹变换，可得慢子的速度永远小于光速。

7. 快子（TACHYON）

当 $|\vec{v}| > c$ 时，作用量和拉氏量为

$$S[x] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L d\lambda = m \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{\vec{v}^2 - 1} dt$$

$$L = m \sqrt{\vec{v}^2 - 1}$$

四动量是

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{\vec{v}^2 - 1}}, \quad H = \frac{m}{\sqrt{\vec{v}^2 - 1}}$$

$$H > 0 \implies m > 0$$

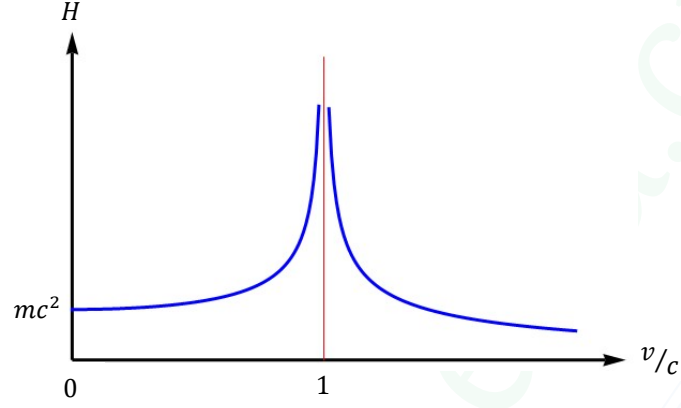
满足质能关系

$$H^2 - \vec{p}^2 = -m^2$$

无论是快子还是慢子，惯性系参考系之间的变换，仍然是恰当顺时洛伦兹变换。在这种变换下，快子的速度永远大于光速。两个快子之间的相对速度小于光速，快子并不“知道”自身是不是快子。

慢子的速度越快，能量越高；快子的速度越快，能量越低。在接近光速时，能量均趋于无穷大。

亚光速和超光速不能转换，原因是两者间存在**光速壁垒**，跨越壁垒需要无限大的能量。



8. 光速粒子（Luxon）

在洛伦兹变换下速度永远等于光速，相当于快子和慢子 $m = 0$ 的极限，

$$L_0(0) = 0 \implies L_0(\dot{x}^2) = L_0(0) = 0$$

能能量关系

$$(p^\mu) = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

$$E^2 - \vec{p}^2 = 0$$

在拉格朗日力学框架下，不存在以光速运动的质点模型（但可以有光速传播的场）。

五、 粒子在电磁场中的运动

1. 广义势

设拉氏函数为

$$L = L_0(t, q, \dot{q}) - U(t, q, \dot{q})$$

其中 L_0 是粒子自由运动的拉氏函数，依赖于广义速度的势能 $U(t, q, \dot{q})$ 称为**广义势能**（或 Schering 势）。

拉氏函数对应的方程是

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L_0}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

式子右边是广义力 Q_α ，

$$Q_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

广义力与坐标、速度都有关。

2. 最小耦合

现在设粒子在广义势能中运动，拉氏函数是

$$L = L_0 - U(x, \dot{x}) = -m\sqrt{\dot{x}^2} - U(x, \dot{x})$$

在规范变换后成为

$$-m\sqrt{\dot{x}^2} - U(x, \dot{x}) \rightarrow -m\sqrt{\dot{x}^2} - U(x, \dot{x}) - \partial_\mu f(x) \dot{x}^\mu$$

在规范变换后，耦合项必然包含

$$U(x, \dot{x}) = qA_\mu(x) \dot{x}^\mu$$

其中 $\dot{x}$ 零次项已由规范变换消去。

我们没有根据认定，广义势能中的线性项一定是纯规范的。有可能实际上

$$A_\mu(x) \neq \partial_\mu f(x)$$

这时广义势对粒子的运动会产生实际的影响。四分量势函数 $A_\mu(x)$ 称为**规范场**。 $A_\mu(x)$ 是描述外部环境对粒子作用的物理量⁶。

按照最简原则⁷，如非必要，我们暂不引进更复杂的相互作用，广义势取作

$$U = qA_\mu(x) \dot{x}^\mu$$

称为**规范耦合**或**最小耦合**（minimal coupling）。后面会看到，这种相互作用只与电荷有关，与偶极矩、四极矩等复杂电磁结构无关。电偶极矩、磁偶极矩等是电荷分布和电荷运动造成的，可由电荷的相互作用推知其运动规律。

通常习惯以时间为参量，这时最小耦合项可以写成

$$U \left(x, \frac{dx}{d\lambda} \right) d\lambda = qA_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda = qA_\mu(x) \frac{dx^\mu}{dt} dt = q \left[\phi(t, \vec{x}) - \vec{A} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \right] dt$$

所以广义势应该写成

$$U(t, \vec{x}, \vec{v}) = q[\phi(t, \vec{x}) - \vec{A} \cdot \vec{v}]$$

3. 规范固定

受到规范作用的亚光速粒子，拉氏函数为

$$L(t, \vec{x}, \vec{v}) = L_0 - U + \frac{df}{dt} = -m\sqrt{1 - \vec{v}^2} - q[\phi(t, \vec{x}) - \vec{A} \cdot \vec{v}] + q \frac{df}{dt}$$

在低速极限下，

$$L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q[\phi(t, \vec{x}) - \vec{A} \cdot \vec{v}] + q \frac{df}{dt}$$

拉氏量中的纯规范函数 $f(t, \vec{x})$ 可以任意选取，

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v}$$

通过重定义规范场为 A'_μ ，

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu \stackrel{\text{def}}{=} A_\mu + \partial_\mu f$$

可以吸收掉纯规范项 df/dt 。上式称为四矢势 A_μ 的**规范变换**。

四矢势 A_μ 的规范变换不改变运动方程，具有不确定性。我们可以通过选取规范项 f ，使四矢势满足 **Lorenz 规范条件**⁸

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

⁶ 规范场在不同规范下表达式不同，因而不能直接测量。另外与外部环境有相互作用的粒子，是非封闭体系，其拉氏函数不需要满足相对论协变性。

⁷ 英格兰逻辑学家威廉·奥卡姆（William Ockham, 1285-1349）提出“如无必要，勿增实体”（Entities should not be multiplied unnecessarily），又称“奥康的剃刀”（Occam's Razor）。

⁸ 丹麦物理学家 Ludvig Lorenz，不是提出洛伦兹变换的荷兰物理学家 H. A. Lorentz。后者是诺贝尔物理学奖获得者。

如果 $\partial_\mu A^\mu \neq 0$ ，只要解方程

$$\partial_\mu \partial^\mu f = \partial_\mu A^\mu$$

求得 $f(x)$ ，则

$$A'_\mu \stackrel{\text{def}}{=} A_\mu - \partial_\mu f$$

必然满足 Lorenz 规范条件。这称为规范固定 (gauge fixing)。

另一种常用的规范是库仑 (Coulomb) 规范，矢量势满足横向条件，

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

上式在对 x, y, z 作三重傅里叶变换之后是

$$\vec{k} \cdot \vec{A}(t, \vec{k}) = 0 \implies \vec{k} \perp \vec{A}$$

矢量势 $\vec{A}$ 垂直于波矢量 $\vec{k}$ ，也就是波传播的方向。

4. 洛伦兹力

设 (亚光速) 粒子在规范场中运动

$$L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = -m\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2} - q[\phi(t, \vec{x}) - \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}]$$

这里打点的符号表示对时间求导。

广义动量为

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} + q\vec{A}$$

注意广义动量中含有矢量势。

广义能量是

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} + q\phi(t, \vec{x})$$

能量与矢量势无关。

运动方程为

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}$$

计算得

$$\text{L. H. S.} = m(1 - \vec{v}^2)^{-\frac{3}{2}}[(1 - \vec{v}^2)\vec{a} + (\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}] + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$= \gamma m[\vec{a} + \gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}] + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$\text{R. H. S.} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = -q\nabla\phi + q\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

把运动方程中与势函数有关的项都移到等式右边，

$$\gamma m[\vec{a} + \gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}] = -q\nabla\phi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q[\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}] = -q\nabla\phi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})$$

现在定义电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 为

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \vec{A}$$

容易检验，该定义符合麦克斯韦方程组的第一、第四式，

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

至此，带电粒子的运动方程可以写成

$$\gamma m[\vec{a} + \gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}] = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

式子右边的作用力是洛伦兹力，

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

运动方程是

$$m[\gamma\vec{a} + \gamma^3(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}] = \vec{F}$$

利用矩阵求逆，解出加速度，

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m} [\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{v})\vec{v}]$$

我们可以看到，在相对论力学中，粒子的加速度不平行于作用力。

如果定义机械动量

$$\vec{p}_{\text{mech}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}}$$

对 t 求导，

$$\frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} = \gamma m[\vec{a} + \gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}]$$

运动方程成为

$$\frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} = \vec{F}$$

方程在形式上，与非相对论牛顿力学中的动量定理一致。

5. 四维牛顿方程

我们可以改写运动方程为协变的形式。把时空坐标写成四矢量，

$$(x^\mu) = (t, x, y, z)$$

定义四维速度和四维加速度，

$$v^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (v^\mu) = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) = (\gamma, \gamma\vec{v})$$

$$a^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv^\mu}{d\tau} = (\gamma^4\vec{v} \cdot \vec{a}, \gamma^2\vec{a} + \gamma^4(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v})$$

那么有

$$ma^\mu = (\gamma^4 m\vec{v} \cdot \vec{a}, \gamma^2 m[\vec{a} + \gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v}]) = \left(\gamma^4 m\vec{v} \cdot \vec{a}, \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

再把前面解出的加速度表达式以及运动方程

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma m} [\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{v})\vec{v}], \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

代入，得

$$(ma^\mu) = \left(\gamma^4 m\vec{v} \cdot \frac{1}{\gamma m} [\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{v})\vec{v}], \gamma \vec{F} \right) = (\gamma^3 \vec{v} \cdot [\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{v})\vec{v}], \gamma \vec{F}) = (\gamma(\vec{F} \cdot \vec{v}), \gamma \vec{F})$$

这就是四维牛顿方程

$$F^\mu = ma^\mu$$

其中的四维力定义为

$$F^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{F})$$

6. 亚光速粒子的低速极限

在低速极限下，对自由粒子的拉氏函数作泰勒展开，

$$L = -m\sqrt{1 - \vec{v}^2} = -m \left(1 - \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \frac{1}{8}\vec{v}^4 - \frac{1}{16}\vec{v}^6 \right) + \mathcal{O}(\vec{v}^8)$$

舍弃无动力学效应的常数项，只保留领头项，

$$L \approx \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = T$$

动量为

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

可见牛顿力学是相对论力学的低速近似，正如伽利略协变性是相对论协变性的低速近似一样。

例 质量为 m ，电荷为 q 的粒子在均匀电磁场 $\vec{E} = E\vec{e}_y, \vec{B} = B\vec{e}_z$ 中运动，写出运动方程。

解：在库伦规范下，静电磁场的矢量势和标量势为

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x} = \frac{1}{2}B(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y), \quad \varphi = -Ey$$

代入广义势得带电粒子的拉氏函数，

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + qEy + \frac{qB}{2}(xy - yx)$$

运动方程是

$$\begin{cases} m\ddot{x} - qB\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} + qB\dot{x} = qE \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

六、 电磁场的动力学*

两个粒子之间用势函数 $V(t, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ 表示的相互作用，是超距作用。

一个粒子的坐标改变，其影响，不需要时间，瞬时即可跨越任意远的距离，表现为另一个粒子的受力发生了变化，这很不合理。

我们一般认为相互作用应该是定域的，两个不同位置的质点，不能直接发生相互作用。

电磁相互作用的广义势

$$U = q(\phi - \vec{A} \cdot \vec{v})$$

代表环境对带电粒子的作用，是超距作用。

非超距作用需要媒介，即通过电磁场间接相互作用。这要求电磁场必须能够在时空中传播，而不仅仅是拉氏量中的一个已知函数。

也就是说，电磁场本身是运动的，拉格朗日函数的变量中必须有 A_μ 的时空偏导数。电磁场应该是作用量泛函的宗量。

1. 作用量的对称性

根据最小作用量原理，设包含规范场的定域作用量为

$$S[A] = \int \mathcal{L}(x, A, \partial_\mu A_\nu, \dots) d^4x$$

为了简洁，泛函宗量没有计及其它物质场和粒子。

假设拉格朗日密度函数满足如下条件：

- ①只包含规范场的一阶导数；
- ②是 $A, \partial_\mu A_\nu$ 的二阶多项式；
- ③相对论协变；
- ④规范不变。

2. 线性项是最小耦合

满足协变性要求的一次项只能是

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu(x)A_\mu(x) - T^{\mu\nu}(x)\partial_\mu A_\nu(x)$$

规范不变性要求，作规范变换

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

时，作用量

$$\int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x$$

的变分不变，即作用量的变化只是时空表面项。

作规范变换时，拉氏密度的改变为

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\text{int}} &= -j^\mu \partial_\mu f - T^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu f \\ &= -\partial_\mu (f j^\mu) + f \partial_\mu j^\mu - \partial_\mu (T^{\mu\nu} \partial_\nu f) + (\partial_\mu T^{\mu\nu}) \partial_\nu f \end{aligned}$$

利用高斯散度定理，

$$\int_D \partial_\mu \psi^\mu d^4x = \int_{\partial D} \psi^\mu dS_\mu$$

dS_μ 表示四维时空的三维表面面元。如果

- (1) 时空流形无边（指表面为空集，比如二维流形球面的一维边界为空集，有限无边），
- (2) 或者时空表面处的 ψ^μ 没有法向分量，

那么散度项积分为零。

舍弃表面项，在规范变换后，线性项的变化是

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\text{int}} &\sim f \partial_\mu j^\mu + (\partial_\mu T^{\mu\nu}) \partial_\nu f \\ &\sim f \partial_\mu j^\mu - (\partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu}) f = f [\partial_\mu j^\mu - \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

因此规范不变性要求

$$\partial_\mu j^\mu - \partial_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} \equiv 0$$

高阶的张量耦合对应多极矩或自旋。可以用无内部结构粒子的最小耦合，来解释张量耦合，因此可以取最小耦合

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu(x)A_\mu(x)$$

其中 j^μ 必须是物质场的**守恒流**，

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(x) &= 0, \quad (j^\mu) \stackrel{\text{def}}{=} (\rho, \vec{j}) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

四矢量 j^μ 的四个分量分别是电荷密度、电流密度。

3. 电磁场的拉格朗日密度

对规范场的二次项，相对论协变性要求

$$\mathcal{L}_0 = c_1 A_\mu A^\mu + c_2 (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + c_3 (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + c_4 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta)$$

其中 c_4 项

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) \\ &= \partial_\alpha [\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\beta] - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu)A_\beta \end{aligned}$$

第二项中 $\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu$ 关于指标 α, μ 对称, 与反对称张量缩并后是零。第一项是表面项, 仅在拓扑结构非平庸的时空有贡献, 因此可舍弃。

于是在规范变换下,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_0 &= c_1[(\partial_\mu f)(\partial^\mu f) + 2(\partial_\mu f)A^\mu] + c_2[(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\mu \partial^\nu f) + 2(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\mu A^\nu)] \\ &\quad + c_3[(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\nu \partial^\mu f) + 2(\partial_\mu \partial_\nu f)(\partial^\nu A^\mu)] \end{aligned}$$

分部积分, 并使用洛伦兹规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$,

$$\delta \mathcal{L}_0 \sim -c_1(\square f)f + c_2(\square^2 f)f + c_3(\square^2 f)f = [-c_1 \square f + (c_2 + c_3) \square^2 f]f$$

上式中的达朗贝尔算符⁹的定义是

$$\begin{aligned} \square &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \\ \square^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu \partial^\nu = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)^2 \end{aligned}$$

规范不变要求

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_0 = 0 &\Rightarrow c_1 = 0, c_2 = -c_3 \\ \Rightarrow \mathcal{L}_0 &= c_2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - c_2(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2}c_2(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \end{aligned}$$

定义电磁张量

$$F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

这是 4 维 2 阶反对称张量, 只有 6 个独立分量。则

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}c_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

按前一节的定义, 电场强度是

$$E^i \stackrel{\text{def}}{=} F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = (-1) \frac{\partial}{\partial x^i} \phi - \frac{\partial}{\partial t} A^i$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{①}$$

磁感应强度为

$$B^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk0} F_{jk} = \frac{1}{2} (-\varepsilon^{0ijk}) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (-A^k) - \frac{\partial}{\partial x^k} (-A^j) \right] = \varepsilon^{0ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{④}$$

$$\Rightarrow F^{ij} = \varepsilon^{0ijk} (-B^k)$$

电磁张量可以写成

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

⁹ d'Alembertian operator, 或波算子 wave operator, 读作 quabla。

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

能量正定（有底）要求 $c_2 < 0$ ，取

$$c_2 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

常数 c_2 的不同取值，相当于选用了不同的单位制。

总的拉格朗日密度是

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

把电磁张量与电场强度、磁感应强度的关系代入拉格朗日密度，可得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}F_{\mu 0}F^{\mu 0} - \frac{1}{4}F_{\mu i}F^{\mu i} = -\frac{1}{4}F_{i0}F^{i0} - \frac{1}{4}(F_{0i}F^{0i} + F_{ji}F^{ji}) \\ &= -\frac{1}{2}F_{i0}F^{i0} - \frac{1}{4}F_{ji}F^{ji} = -\frac{1}{2}(-\vec{E}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{4} \cdot 2\vec{B}^2 = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - (\rho\phi - \vec{j} \cdot \vec{A})$$

4. 拉格朗日方程

根据最小作用量原理可得电磁场的运动方程。只看规范场的变分项，

$$\left. \begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} - j^\mu\delta A_\mu \\ F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} &= F^{\mu\nu}(\partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu) \\ &\quad \left. \begin{aligned} &\Rightarrow F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} \sim -(\partial_\mu F^{\mu\nu})\delta A_\nu + (\partial_\nu F^{\mu\nu})\delta A_\mu = -2(\partial_\nu F^{\nu\mu})\delta A_\mu \end{aligned} \right\} \\ &\quad \text{分部积分} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L} \sim [\partial_\nu F^{\nu\mu} - j^\mu]\delta A_\mu$$

于是规范场的拉格朗日方程为

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu$$

取上述方程的 $\mu = 0$ 分量，

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu 0} &= \partial_i F^{i0} = -\partial_i F^{0i} = \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \nabla \cdot \vec{E} \\ &\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{②} \end{aligned}$$

取 $\mu = 1, 2, 3$ 分量，

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} = \frac{\partial(-E_i)}{\partial t} + \partial_k \varepsilon^{kij} B_j \\ &\quad -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \vec{j} \quad \text{③} \end{aligned}$$

这正是 Maxwell 方程组的第二、第三个方程。

5. 国际单位制下的麦克斯韦方程

现在有四个方程，

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

为恢复到国际单位制，需要更改单位，

$$\rho \rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{j} \rightarrow \mu_0 \vec{j}, \quad c^{-2} \rightarrow \mu_0 \varepsilon_0$$

得到 SI 制下的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

以及拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) - \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \phi - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{A} \right) \right] = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 - \left(\rho \phi - \frac{1}{c^2} \vec{j} \cdot \vec{A} \right)$$

6. 点电荷与电磁场的作用

记点电荷的坐标为

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

那么电荷密度与电流密度分别是

$$\rho(t, \vec{x}) = q \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)), \quad \vec{j}(t, \vec{x}) = q \dot{\vec{r}} \delta(\vec{x} - \vec{r}(t))$$

代入作用量得

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}_{\text{int}} dx^4 &= - \int j^\mu(x) A_\mu(x) dx^4 = - \int (\rho \phi - \vec{j} \cdot \vec{A}) dx^4 = - \int [q \phi(t, \vec{r}(t)) - q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(t, \vec{r}(t))] dx^0 \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} q (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) dt \end{aligned}$$

与上节的结果一致。

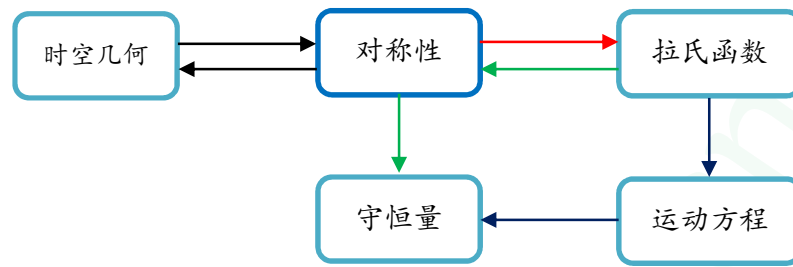
一个相对论带电粒子与电磁场构成的系统，作用量是

$$S[\vec{r}, A] = \int \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) d^4x + \int_{t_1}^{t_2} \left[-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right] dt$$

七、 对称性与物理学

以最小作用量原理和对称性作为理论的出发点，在前几节中，我们通过对拉氏函数作对称性分析，确定了物理模型。

在近代科学的开创时期，伽利略就提出了力学的相对性原理。到爱因斯坦的狭义相对论、广义相对论（“相对”即“对称”），再到李政道和杨振宁发现宇称不守恒，人们逐渐认识到对称性对物理学的重要性。现代物理学中的规范场论、标准模型无不建立在对称性的基础之上。



对称性决定物理学

例 广义相对论和 Lovelock 定理

在四维时空中，当拉氏量仅为度规的函数时，不高于二阶的 Euler-Lagrange 方程的形式只能是¹⁰

$$\alpha\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}\right)+\lambda\sqrt{-g}g^{\mu\nu}=E^{\mu\nu}$$

这里的记号 g 表示度规矩阵 $(g_{\mu\nu})$ 的行列式， $R^{\mu\nu}$ 是里奇张量， R 是曲率标量， λ 是宇宙学常数， $E^{\mu\nu}$ 是物质场的能量-动量张量。

方程对应的拉氏密度为¹¹

$$\mathcal{L}=\alpha\sqrt{-g}R-2\lambda\sqrt{-g}$$

满足广义协变性的、更一般的拉氏密度表达式为¹²

$$\mathcal{L}=\alpha\sqrt{-g}R-2\lambda\sqrt{-g}+\beta\varepsilon^{\alpha\beta\sigma\rho}R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R_{\mu\nu\sigma\rho}+\gamma\sqrt{-g}\left(R^2-4R^\mu{}_\nu R^\nu{}_\mu+R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\right)$$

其中 $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ 是黎曼曲率张量。

¹⁰ A. Einstein (1916), The Foundation of the General Theory of Relativity, Annalen der Physik, 49

¹¹ Hilbert, David (1950). [The Foundations of Geometry](#) [*Grundlagen der Geometrie*] (2nd ed.). La Salle, IL: Open Court Publishing.

¹² D. Lovelock, Divergence-free tensorial concomitants, Aequ. Math., 4 (1970), p. 127, 10.1007/BF01817753.

D. Lovelock, The four-dimensionality of space and the Einstein tensor, J. Math. Phys., 13 (1972), pp. 874-876.
Katsuki Aoki, Mohammad Ali Gorji, Shinji Mukohyama, A consistent theory of $D \rightarrow 4$ Einstein-Gauss-Bonnet gravity, Physics Letters B, Volume 810, 2020.

附录 1 连续体系的诺特定理

本章讨论的诺特定理，可以推广到多重积分型泛函的作用量，用于经典场论。

考虑四维时空中的场。时空坐标 $(x^\mu) = (t, x, y, z)$ 相当于离散情形的参量 t ，标量场

$$\phi(x) = \phi(t, x, y, z)$$

相当于离散情形的 q ，系统的作用量为

$$S[\phi] = \int_D \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) d^4x$$

上式中 $\mathcal{L}$ 是拉氏密度， D 是任意选取的单连通时空区域。

在无穷小变换下，时空坐标和场的变换为

$$x \rightarrow x', \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x')$$

这导致作用量改变，

$$S[\phi] = \int_D \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) d^4x \rightarrow \int_{x' \in D'} \mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu}\right) d^4x'$$

准对称变换使作用量在变换前后只相差一个表面项，即

$$\mathcal{L}'(x, \phi, \partial_\mu \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu}\right) \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right) \equiv \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) + \partial_\mu \Theta^\mu(x, \phi(x))$$

而作用量的全变分为

$$\begin{aligned} \Delta S[\phi] &= \int_{x' \in D'} \mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu}\right) d^4x' - \int_D \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) d^4x \\ &= \int_D \mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu}\right) \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right) d^4x - \int_D \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) d^4x \end{aligned}$$

利用

$$\det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right) = \det\left(\delta_\beta^\alpha + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta x^\alpha\right) = 1 + \text{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \Delta x^\alpha\right) = 1 + \partial_\mu \Delta x^\mu$$

$$\mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu}\right) - \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) = \Delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} + (\partial_\mu \mathcal{L}) \Delta x^\mu$$

可得

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu}\right) \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right) - \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) \\ &= \mathcal{L}\left(x', \phi'(x'), \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu}\right) - \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) + \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) \partial_\mu \Delta x^\mu + \sigma(\epsilon) \\ &= \delta \mathcal{L} + (\partial_\mu \mathcal{L}) \Delta x^\mu + \mathcal{L}(x, \phi, \partial_\mu \phi) \partial_\mu \Delta x^\mu + \sigma(\epsilon) \\ &= \delta \mathcal{L} + \partial_\mu (\mathcal{L} \Delta x^\mu) + \sigma(\epsilon) \end{aligned}$$

代入 $\Delta S[\phi]$ 并作分部积分，

$$\begin{aligned} \Delta S[\phi] &= \int_D \{\delta \mathcal{L} + \partial_\mu (\mathcal{L} \Delta x^\mu)\} d^4x \\ &= \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} \delta \phi d^4x + \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right\} d\sigma_\mu \end{aligned}$$

$$= \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} \delta \phi d^4 x + \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \Delta x^\nu + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right\} d\sigma_\mu$$

其中的面积元是

$$d\sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma$$

引进能量-动量张量，定义为

$$T_\nu^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} g_\nu^\mu$$

那么作用量的全变分可以写成

$$\Delta S[\phi] = \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} \delta \phi d^4 x + \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - T_\nu^\mu \Delta x^\nu \right\} d\sigma_\mu$$

利用高斯定理得

$$\int_D \partial_\mu \Theta^\mu(x, \phi(x)) d^4 x = \int_{\partial D} \Theta^\mu d\sigma_\mu$$

于是准对称变换等价于

$$\int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right\} \delta \phi d^4 x + \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - T_\nu^\mu \Delta x^\nu \right\} d\sigma_\mu = \int_{\partial D} \Theta^\mu d\sigma_\mu$$

把经典场的运动方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0$$

代入上式得

$$\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - T_\nu^\mu \Delta x^\nu - \Theta^\mu \right\} d\sigma_\mu = 0$$

由边界面的任意性，有

$$\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - T_\nu^\mu \Delta x^\nu - \Theta^\mu \right\} = 0$$

这是一个守恒方程，

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

其中流密度

$$\begin{aligned} j^\mu &\propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - T_\nu^\mu \Delta x^\nu - \Theta^\mu \\ \rho &\stackrel{\text{def}}{=} j^0 \end{aligned}$$

“荷”密度的积分即诺特荷，不随时间变化：

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \{ \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} \} dx dy dz &= 0 \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \rho dx dy dz &= - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \vec{j} dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

例 若时空平移

$$\Delta\phi = 0, \quad \Delta x^\nu \neq 0$$

是准对称变换，那么动量和能量守恒。

Copyright © 2025-11-13



jizhuo@ustc.edu.cn
勿传校外网