

第3章 变分法与最小作用量原理

对于那些不懂数学的人来说，要真正感受大自然最深刻的美，是很困难的。

——R.P. Feynman

D'Alembert 引入的虚位移，实际上就是数学分析中的变分。分析力学的基本原理与变分法有直接联系。在后面的章节中，如最小作用量原理、诺特定理、正则变换和刚体运动的讨论，都会用到变分法。

变分法是一个强有力的理论工具，是数学分析中的核心内容。在量子力学、量子场论等后续课程，以及其它自然和工程学科中，都有变分法的应用。熟练掌握变分法，对专业课程的学习和分析能力的提高大有裨益。

一、泛函与变分

1. 泛函的概念

普通的函数是从数到数的映射，

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

自变量为一个或多个实数。

泛函是普通函数概念的推广，自变量是函数，或者函数的集合，

$$\Phi: \{\text{函数}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

泛函的自变量称为**宗量**。即给定一条或多条函数曲线（多变量函数为曲面） $y = f(x)$ ，泛函将其对应到唯一的数值 $\Phi[f]$ 。

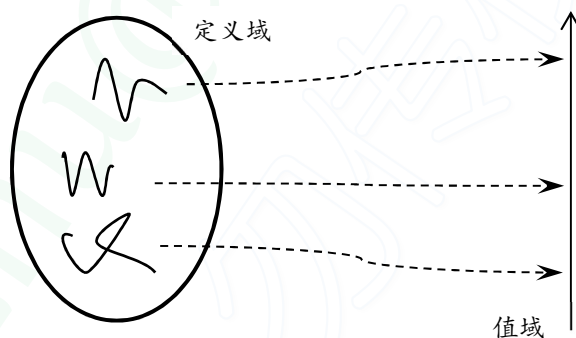


图 1 泛函的定义域和值域

例 1 $g(x) \triangleq x^2 + 2x$ 是函数；而

$$\begin{aligned} \Phi: C_{(-\infty, +\infty)} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Phi[f] &\triangleq f(1) \end{aligned}$$

是泛函。泛函值是

$$\Phi[\sin] = \sin 1 \approx 0.84, \quad \Phi[\exp] = e^1 \approx 2.718, \quad \Phi[g] = 3.$$

例 2 定义泛函

$$\Phi: C_{[0,2]} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^2 f(x) dx$$

如果有两条曲线

$$\varphi_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x}, \quad \varphi_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x^2} x \sin x$$

那么

$$\Phi[\varphi_1] = 1 - e^{-2} \approx 0.864665, \quad \Phi[\varphi_2] \approx 0.337979.$$

例 3 下面的泛函有两个宗量,

$$\Phi[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x} dx$$

例 4 复合函数可以看作泛函

$$\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} F(x, f(x))$$

x 是泛函定义式中的参数。

泛函可类比于多变量函数,

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

$$\Phi[f] \sim \{f(z) | z \in D\}.$$

这里的 $f(z)$ 相当于前面多变量函数的自变量 x_i , $f \leftrightarrow x, z \leftrightarrow i$; 泛函 $\Phi[f]$ 是以无穷多个变量 $f(z_1), f(z_2), \dots$ 作为自变量的函数。

2. 泛函的连续性

函数的连续性是重要的基础概念, 类似地我们需要定义泛函的连续性。

对于泛函 $\Phi[f]$, 给定函数 $g(x)$, 如果能够满足:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

当 $|f(x) - g(x)| < \delta, |f'(x) - g'(x)| < \delta, \dots, |f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| < \delta$ 时,

有 $|\Phi[f] - \Phi[g]| < \varepsilon$ 成立,

则称泛函 $\Phi[f]$ 在 g 处 n 阶接近 的连续。

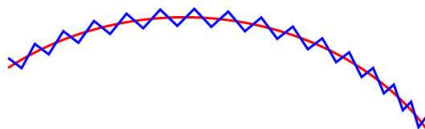


图 2 图中的两条曲线 0 阶接近

3. 变分

类比于多变量函数 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其自变量的微分为

$$dx_j = x'_j - x_j$$

泛函 $\Phi[f]$ 的自变量为 $\{f(x) | x \in \text{定义域}\}$, 宗量的变分定义为函数形状的无穷小变化,

$$\delta f = \tilde{f} - f, \quad \delta f(x) = \tilde{f}(x) - f(x) = \epsilon \eta(x)$$

其中 ϵ 是无穷小量, $\eta(x)$ 是连续有界函数。

保留到线性主部, 多变量函数的微分定义为

$$d\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n) - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

而泛函的变分则是

$$\delta\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} \Phi[f + \delta f] - \Phi[f] \equiv \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon.$$

例 5 $\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0)$, $\delta\Phi[f] = (f + \delta f)(x_0) - f(x_0) = \delta f(x_0)$.

例 6 任何一个已知的函数, 由于不能变形, 其变分为零。例如

$$\delta \sin x = 0, \quad \delta x = 0.$$

例 7 质点的位移可以看成泛函, 广义坐标是宗量,

$$\vec{x}_i[q_1, q_2, \dots, q_n] \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}_i(t, q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$$

在上式中, t 被当作参数。

虚位移就是泛函的变分, 有

$$\delta\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q(t) + \delta q(t)) - \vec{x}_i(t, q(t)) = \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha(t)$$

例 8 计算泛函的变分,

$$\begin{aligned} \Phi[f, g] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx \\ \delta\Phi[f, g] &= \Phi[f + \delta f, g + \delta g] - \Phi[f, g] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f + \delta f)(x)(g + \delta g)(x)e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{\delta f(x)g(x) + f(x)\delta g(x)\}e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

4. 变分的运算规则

与微分法则类似, 可以证明下列规则:

$$\delta(c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2) = c_1\delta\Phi_1 + c_2\delta\Phi_2 \text{ (线性)}$$

$$\delta(\Phi_1\Phi_2) = \delta\Phi_1 \cdot \Phi_2 + \Phi_1 \cdot \delta\Phi_2 \text{ (Leibniz 法则)}$$

$$\delta(F(\Phi_1, \dots, \Phi_n)) = \frac{\partial F}{\partial \Phi_j} \delta\Phi_j \text{ (链式法则)}$$

$$\delta\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = \frac{\delta\Phi_1 \cdot \Phi_2 - \Phi_1 \delta\Phi_2}{\Phi_2^2}, \quad \delta(\Phi^n) = n\Phi^{n-1}\delta\Phi$$

5. 变分可以与微分、积分交换次序

按定义,

$$\begin{aligned} \delta \frac{d}{dx} f(x) &\equiv \delta \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \right\} \\ &\equiv \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(f + \delta f)(x + \epsilon) - (f + \delta f)(x)}{\epsilon} \right\} - \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta f(x + \epsilon) - \delta f(x)}{\epsilon} = \frac{d}{dx} \delta f(x) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{dx} \delta = \delta \frac{d}{dx}$$

对分析力学中的虚位移,

$$\delta \frac{d}{dt} \vec{x}_i(t, q) = \frac{d}{dt} \delta \vec{x}_i(t, q)$$

在分析力学中称为等时变分或简单变分。

对于积分型泛函，

$$\begin{aligned} \delta \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx &\equiv \int_a^b F(x, (f + \delta f)(x), (f' + \delta f')(x)) dx - \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx \\ &= \int_a^b \{F(x, f + \delta f, f' + \delta f') - F(x, f, f')\} dx = \int_a^b \delta F(x, f(x), f'(x)) dx \end{aligned}$$

变分与积分符号也可以交换次序。

6. 泛函的导数*

多变量函数的偏导数定义为

$$\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

或者写成微分形式，

$$d\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$$

类似的，泛函的导数 $\delta\Phi/\delta f(x)$ 定义为

$$\delta\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{\delta\Phi}{\delta f(x)} \delta f(x) dx$$

例 9 计算泛函导数，

$$\begin{aligned} \Phi[f] &\stackrel{\text{def}}{=} f(x_0) \\ \delta\Phi[f] &= \Phi[f + \delta f] - \Phi[f] = \delta f(x_0) \\ \delta\Phi[f] &= \int \frac{\delta\Phi}{\delta f(x)} \delta f(x) dx = \int \frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} \delta f(x) dx \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \int \left\{ \frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} - \delta_D(x - x_0) \right\} \delta f(x) dx = 0 \\ \delta f(x_0) = \int \delta_D(x - x_0) \delta f(x) dx \end{array} \right. \end{aligned}$$

这里 $\delta f(x) \sim \epsilon \eta(x)$, $\delta_D(x - x_0)$ 是 Dirac 冲击函数。由变分基本引理（引理在后文；需要把冲击函数看成光滑函数的极限），

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} - \delta_D(x - x_0) = 0$$

$$\boxed{\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta_D(x - y)}$$

例 10 计算泛函导数，

$$\begin{aligned} \Phi[f] &\stackrel{\text{def}}{=} f'(a) \\ \delta\Phi &= \delta f'(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_D(x - a) \delta f'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'_D(x - a) \delta f(x) dx \\ \boxed{\frac{\delta f'(x)}{\delta f(y)} = \frac{d}{dx} \delta_D(x - y)} \end{aligned}$$

例 11 计算泛函导数，

$$\Phi[f, g] = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x) dx$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi}{\delta f(x)} &= \int_0^\infty e^{-y} \left\{ \frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} g(y) + f(y) \frac{\delta g(y)}{\delta f(x)} \right\} dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y} \{ \delta(y-x)g(y) + f(y) \cdot 0 \} dy = e^{-x} g(x) h(x)\end{aligned}$$

$$\frac{\delta\Phi}{\delta g(x)} = e^{-x} f(x) h(x)$$

其中 $h(x)$ 是阶跃函数（Heaviside function）。

例 12 计算泛函导数，

$$\begin{aligned}\Phi[f] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x^2+1) + 2f(x)\} dx \\ \frac{\delta\Phi}{\delta f(y)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\delta f(x^2+1)}{\delta f(y)} + 2 \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} \right\} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \delta_D(x^2+1-y) + 2\delta_D(x-y) \} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{h(y-1)}{2\sqrt{y-1}} \delta_D(x-\sqrt{y-1}) + \frac{h(y-1)}{2\sqrt{y-1}} \delta_D(x+\sqrt{y-1}) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta_D(x-y) \right\} dx = \frac{1}{\sqrt{y-1}} h(y-1) + 2\end{aligned}$$

上面用了狄拉克 δ 函数的性质，

$$\delta_D(\varphi(x)) = \sum_{x_0: \varphi(x_0)=0} \frac{1}{|\varphi'(x_0)|} \delta_D(x-x_0)$$

另一种计算方法（用变分）：

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \delta f(x^2+1) + 2\delta f(x) \} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f(x^2+1) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta f(x) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \delta f(y) d(+\sqrt{y-1}) + \int_{+\infty}^1 \delta f(y) d(-\sqrt{y-1}) + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta f(x) dx \quad (y \stackrel{\text{def}}{=} x^2+1) \\ &= 2 \int_1^{+\infty} \delta f(y) d(\sqrt{y-1}) + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y-1}} \delta f(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} h(x-1) + 2 \right) \delta f(x) dx\end{aligned}$$

7. 二阶变分

以一个积分型泛函的变分为例，

$$\begin{aligned}\Phi[f, g] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b F(x, f(x), g(x)) dx \\ \delta\Phi &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) + \frac{\partial F}{\partial g} \delta g(x) \right\} dx \\ \delta^2\Phi &= \delta(\delta\Phi) = \delta \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) + \frac{\partial F}{\partial g} \delta g(x) \right\} dx = \int_a^b \left\{ \left(\delta \frac{\partial F}{\partial f} \right) \delta f(x) + \left(\delta \frac{\partial F}{\partial g} \right) \delta g(x) \right\} dx \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f} (\delta f(x))^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial g} \delta f(x) \delta g(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial g \partial g} (\delta g(x))^2 \right\} dx\end{aligned}$$

高阶变分的计算规则类似于高阶微分。

8. 泛函的积分*

泛函积分记作

$$\int \Phi[f][\mathfrak{D}f]$$

上式中的 $[\mathfrak{D}f]$ 是积分测度。泛函积分又叫**路径积分**，表示对所有可能路径 $y = f(x)$ 的泛函值求和。
需要注意：泛函导数的逆问题是反变分，而不是泛函积分。

路径积分的思想可以追溯到1678年，荷兰物理学家克里斯蒂安·惠更斯(Christiaan Huygens)在《光论》中提出的惠更斯原理：光在传播过程中，波阵面上的每个点都是发射次波的波源；在之后的时刻，次波面的包络面，就是总扰动的波面。按这种观点，光波在从A点传播到B点时，实际上走过了所有可能的路径。

1933年，英国物理学家保罗·狄拉克认为，在量子理论中物质波，同样是沿着所有可能的路径进行传播的。从波源A点传播到B点的振幅，是各个路径传播而来的振幅之和；各路径的相位延迟正比于该路径的作用量（在本章后面定义）。路径积分量子力学是和矩阵力学、波动力学等价的量子力学公理体系，是美国物理学家理查德·费曼(Richard Feynman)在1948年发展出来的。

泛函积分不仅用于量子场论、超弦理论这样的物理理论，还在扩散问题和布朗运动、随机过程等数学问题中广泛应用。在经济学中，也有人提出过基于路径积分的定价理论。

9. 可动边界的变分

积分型泛函在物理学和工程学科中比较常见。如果不仅宗量曲线形状发生了变化，积分的边界也有变动，即泛函的宗量包括了函数以及实参量积分边界，

$$\Phi[f, x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x), f'(x))dx$$

这时的变分是

$$\begin{aligned} \delta\Phi[f, x_1, x_2] &= \Phi[f + \delta f, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2] - \Phi[f, x_1, x_2] \\ &= \int_{x_1 + \Delta x_1}^{x_2 + \Delta x_2} F(x, (f + \delta f)(x), (f' + \delta f')(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x), f'(x))dx \\ &= F(x_2, f(x_2), f'(x_2))\Delta x_2 - F(x_1, f(x_1), f'(x_1))\Delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, f(x), f'(x))dx \end{aligned}$$

第一项来自积分边界的变动，后一项来源于曲线形状的变化，

$$\delta\Phi[f, x_1, x_2] = (F\Delta x)|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx$$

10. 全变分

物理资料中有一种称为全变分的常见运算。

如图所示，考虑自变量的微小变化，

$$x \rightarrow \tilde{x} = x + \Delta x(x)$$

其中 Δx 可微函数，

$$\Delta x = \Delta x(x) = \mathcal{O}(\epsilon), \quad x \in [x_1, x_2]$$

同时函数形状也发生了变化，

$$f \rightarrow \tilde{f} = f + \delta f$$

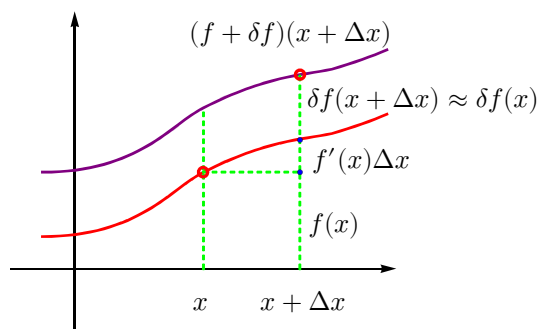


图 3 泛函宗量的全变分

①这时我们定义泛函宗量的全变分为（保留到一阶无穷小）：

$$\Delta f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f + \delta f)(x + \Delta x) - f(x)$$

保留到线性项，有

$$(f + \delta f)(x + \Delta x) - f(x) = f(x + \Delta x) + \delta f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\boxed{\Delta f(x) = \delta f(x) + f'(x)\Delta x}$$

②复合函数的全变分是

$$\Delta F \stackrel{\text{def}}{=} F\left(\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x}), \frac{d\tilde{f}(\tilde{x})}{d\tilde{x}}\right) - F(x, f(x), f'(x))$$

$$\boxed{\Delta F(x, f(x), f'(x)) = \delta F(x, f, f') + \frac{dF(x, f, f')}{dx} \Delta x}$$

③积分型泛函

$$\Phi[f, x_1, x_2] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x), f'(x)) dx$$

的变化

$$\delta\Phi[f, x_1, x_2] = \Phi[f + \delta f, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2] - \Phi[f, x_1, x_2]$$

称为泛函的全变分，把泛函表达式代入上式，记作

$$\begin{aligned} \Delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, f(x), f'(x)) dx &= \int_{\tilde{x}=\tilde{x}_1}^{\tilde{x}=\tilde{x}_2} F\left(\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x}), \frac{d\tilde{f}(\tilde{x})}{d\tilde{x}}\right) d\tilde{x} - \int_{x=x_1}^{x=x_2} F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}\right) dx \\ &= \int_{x=x_1+\Delta x_1}^{x=x_2+\Delta x_2} F(x, (f + \delta f)(x), (f' + \delta f')(x)) dx - \int_{x=x_1}^{x=x_2} F(x, f(x), f'(x)) dx \end{aligned}$$

这里

$$\Delta x_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x(x_1), \quad \Delta x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x(x_2)$$

我们用大写的希腊字母“ Δ ”代替变分符号“ δ ”，以提醒读者——泛函的积分限是可变的。

展开并保留到一阶无穷小，

$$\Delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = (F\Delta x)|_{x_2} - (F\Delta x)|_{x_1} + \delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = (F\Delta x)|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx$$

可见泛函的全变分来自两部分的贡献：一是曲线形状发生变化带来的改变；二是由于积分变量的变化 $x \rightarrow x + \Delta x(x)$ ，等效于积分边界移动所致，

$$x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 = x_1 + \Delta x(x_1), \quad x_2 \rightarrow \tilde{x}_2 = x_2 + \Delta x(x_2)$$

从对泛函数值的影响这个角度来看，全变分等于可动边界的变分。

由于

$$\delta F(x, f(x), f'(x)) = \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f'(x)$$

上式中的 $\delta f(x)$ 与 $\delta f'(x)$ 线性相关，

$$\delta f(x_2) - \delta f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \delta f'(x) dx$$

我们需要把两项合并。利用

$$\frac{\partial F}{\partial f'} \delta f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \delta f(x) \right) - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f(x)$$

分部积分得

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f'(x) dx = \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \delta f(x) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f(x) dx$$

因此泛函的全变分是

$$\Delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = (F \Delta x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \delta f(x) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f(x) dx$$

如果把边界项改用全变分符号来表示，

$$\delta f(x) = \Delta f(x) - f'(x) \Delta x$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f'} \delta f(x) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \left[-\frac{\partial F}{\partial f'} f'(x) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'} \Delta f(x) \right] \Big|_{x_1}^{x_2}$$

那么积分型泛函的全变分是

$$\Delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = \left[-\left(\frac{\partial F}{\partial f'} f' - F \right) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'} \Delta f(x) \right] \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f(x) dx$$

推论 1 全变分与积分不能交换顺序。

证明：利用

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \Delta F dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta F + \frac{dF}{dx} \Delta x \right) dx \\ \Delta \int_{x_1}^{x_2} F dx &= \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx + F \Delta x \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (F \Delta x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta F + \frac{dF}{dx} \Delta x + F \frac{d(\Delta x)}{dx} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\Delta F + F \frac{d(\Delta x)}{dx} \right) dx \end{aligned}$$

于是

$$\Delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \Delta F dx + \int_{x_1}^{x_2} F d(\Delta x)$$

推论 2 全变分和求导也不能交换顺序。

证明：对宗量的全变分，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\Delta f(x)) &= \frac{d}{dx}\{\delta f(x) + f'(x)\Delta x\} = \delta f'(x) + f''(x)\Delta x + f'(x)\frac{d(\Delta x)}{dx} \\ &= \Delta \frac{d}{dx}f(x) + f'(x)\frac{d(\Delta x)}{dx}\end{aligned}$$

不能交换。

同样可得对拉格朗日函数，全变分与求导不能交换顺序，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Delta F(x, f, f') &= \frac{d}{dx}\left(\delta F + \frac{dF}{dx}\Delta x\right) = \delta \frac{dF}{dx} + \left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right)\right\}\Delta x + \frac{dF}{dx}\frac{d(\Delta x)}{dx} \\ &= \Delta \frac{d}{dx}F(x, f, f') + \frac{dF}{dx}\frac{d(\Delta x)}{dx}\end{aligned}$$

总之，

$$\left[\frac{d}{dx}, \Delta\right] = \frac{d(\Delta x)}{dx} \frac{d}{dx}$$

二、泛函的极值

1. 泛函的极值

泛函 $\Phi[f]$ 取平稳值的必要条件为

$$\delta\Phi[f_1, f_2, \dots, f_N] = 0$$

满足 $\delta\Phi = 0$ 的曲线 $y = f(x)$ ，称为极值函数或致极曲线（the extremal function, the minimizer）。

类似于多变量函数取极大值或极小值的条件，泛函取极值的充分条件除了 $\delta\Phi = 0$ 外，还必须满足 $\delta^2\Phi < 0$ （取极大值）或 $\delta^2\Phi > 0$ （取极小值）。不过在很多的应用中，我们无需计算泛函的二阶变分。

2. 拉格朗日变分基本引理

记函数的集合

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \eta \mid \eta \in C_{[x_1, x_2]}^{(2)}, \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \right\}$$

若连续函数已知 $G(x) \in C_{[x_1, x_2]}$ 满足

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x)\eta(x)dx = 0, \quad \forall \eta \in A$$

则必有

$$G(x) = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

证明：反设 $\exists a \in (x_1, x_2), G(a) = \alpha \neq 0$ ，不妨设 $G(a) > 0$ 。由于 $G(x)$ 连续，存在 a 点的邻域 $[a - w, a + w] \subseteq [x_1, x_2]$ ，在区间 $[a - w, a + w]$ 中， $G(x) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$ 。

现在构造 $\eta(x)$ 为

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a - w, a + w]; \\ -(x - (a - w))^3 (x - (a + w))^3 > 0, & x \in [a - w, a + w], \end{cases}$$

则

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x)\eta(x)dx = \int_{a-w}^{a+w} G(x)\eta(x)dx \geq \frac{\alpha}{2} \int_{a-w}^{a+w} \eta(x)dx > 0$$

与 $\int_{x_1}^{x_2} G(x)\eta(x)dx = 0$ 矛盾, 所以 $\forall a \in (x_1, x_2), G(a) = 0$ 。再由函数的连续性, 在端点上同样有 $G(x_1) = G(x_2) = 0$ 。

积分型泛函的变分可以写成

$$\delta\Phi[f] = \int_a^b G(x)\delta f(x)dx$$

的形式, 由于 $\delta f(x) \equiv \epsilon\eta(x)$, 泛函取极值的必要条件 $\delta\Phi = 0$ 即要求 $G(x) = 0$ 。

定理中 $\eta(x)$ 所需满足的条件可以更改为“连续”或者“1 阶导数连续”, “3 阶导数连续”等等。

3. 固定边界的泛函极值

在数学史上, 对最速降线问题 (the brachistochrone problem)、悬链线、极小曲面和等周问题的分析, 导致了变分法 (calculus of variation) 的发明。

(1) 最速降线 BRACHISTOCHRONE PROBLEM

例 13 1630 年, 伽利略提出了这样一个问题: “一个小球在重力的作用下, 从一个给定点滑到另一个不在其垂直下方的点, 在不计摩擦的情况下, 小球沿着什么路线下滑所需要的时间最短?”

1638 年, 伽利略在《论两种新科学》给出的答案是圆弧。这个答案是错误的。

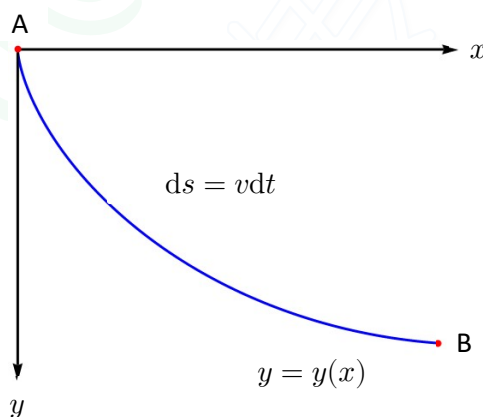
约翰·伯努利 (Johann(I) Bernoulli) 在 1696 年给他的哥哥雅克布·伯努利 (Jacob(I) Bernoulli) 的公开信中用这一问题发起挑战。

这个问题严格的描述如下: 在垂直平面上有两个固定的点 A 和 B , 两点之间用曲线 $y = y(x)$ 连接。一个质点被束缚在曲线上, 初速为 0, 在重力作用下无摩擦下降。什么样的曲线形状 $y(x)$ 可以使质点从 A 到 B 所花的时间最少?

解 ①以水平方向为 x 轴, 向下方向为 y 轴, A 点为原点, 曲线形状为

$$y = y(x), \quad x \in [x_A, x_B]$$

不妨设 $x_B > 0, y_B > 0$ 。



②由机械能守恒求得质点速度 v ,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

通过距离 ds 所需的时间为

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$$

从A到B所花的总时间为

$$t_{AB}[y] = \int_{t=t_A}^{t=t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx = \int_{x_A}^{x_B} F(y, y') dx$$

其中拉格朗日函数 $F(y, y')$ 是

$$F(y, y') \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

③计算泛函的变分,

$$\delta t_{AB} = \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) \Big|_{x=x_A}^{x=x_B} + \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx$$

边界点函数值固定, 所以变分为零,

$$y(x_A) = y_A \Rightarrow \delta y(x_A) = 0$$

$$y(x_B) = y_B \Rightarrow \delta y(x_B) = 0$$

泛函取极值时, 变分为零,

$$\delta t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx = 0$$

$y(x)$ 是二阶连续函数,

$$y(x) \in C_{[x_A, x_B]}^{(2)}$$

并且变分是

$$\delta y(x) \equiv \epsilon \eta(x)$$

在两端边界处, 函数值确定, 所以

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

完全符合拉格朗日变分基本引理的应用条件,

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad x \in (x_A, x_B)$$

即曲线 $y(x)$ 满足二阶微分方程

$$\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} \right) = 0$$

④上述方程整理后得

$$\frac{y''}{1+y'^2} + \frac{1}{2y} = 0$$

利用

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dy'}{dy}$$

可以把微分方程变形为

$$\frac{2y' dy'}{1+y'^2} = -\frac{dy}{y}$$

积分得

$$\begin{aligned}\ln(1+y'^2) &= c - \ln y \\ (1+y'^2)y &= c_1 \geq 0\end{aligned}$$

从上式解出

$$\begin{aligned}y' &= \pm \sqrt{\frac{1-y/c_1}{y/c_1}} \\ dy \sqrt{\frac{y/c_1}{1-y/c_1}} &= \pm dx\end{aligned}$$

引进参数 θ , 作三角代换以方便求积,

$$\begin{aligned}y/c_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ dy &= d\left[\frac{c_1}{2}(1-\cos\theta)\right] = \frac{c_1}{2} \sin\theta d\theta \\ \Rightarrow dx &= \pm \sqrt{\frac{y/c_1}{1-y/c_1}} dy = \pm \tan \frac{\theta}{2} \frac{c_1}{2} \sin\theta d\theta = \pm c_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \pm \frac{c_1}{2} (1-\cos\theta) d\theta \\ x &= c_2 \pm \frac{c_1}{2} (\theta - \sin\theta)\end{aligned}$$

利用边界条件点的坐标, 得

$$\left. \begin{aligned}y_A = 0 \\ x_A = 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow c_2 = 0$$

以及

$$x_B > 0, y_B > 0 \Rightarrow x = \frac{c_1}{2} (\theta - \sin\theta), c_1 > 0$$

最后记

$$a = \frac{c_1}{2} > 0$$

曲线方程可以改写成

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

此曲线是摆线。

(2) 固定边界积分型泛函的极值

对于积分型泛函

$$\Phi[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f') dx$$

如果边界 x_1, x_2 固定不动,

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$$

并且边值也固定不变,

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2$$

那么宗量在边界处的变分为零,

$$\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$$

如前面的例题中的推导一样，泛函的极值条件是

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0, \quad x \in (x_1, x_2)$$

上式称为欧拉-拉格朗日方程，或者简称欧拉方程。

如果没有指定边界处的函数值 $f(x_1), f(x_2)$ ，则

$$\delta f(x_1) \neq 0, \quad \delta f(x_2) \neq 0$$

$\delta f(x_1)$ 、 $\delta f(x_2)$ 和 $\{\delta f(x) | x \in (x_1, x_2)\}$ 是独立（线性无关）的变分。从极值条件

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f'} \delta f(x) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f(x) dx = 0$$

可得自然边界条件

$$\frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{x=x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{x=x_2} = 0$$

以及欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0, \quad x \in (x_1, x_2)$$

欧拉方程是二阶常微分方程，需要两个边界条件来确定积分常数，两个自然边界条件刚好可用。

（3） 欧拉方程的首次积分

① $F = F(f, f')$ ，“广义能量”

$$f' \frac{\partial F}{\partial f'} - F = \text{constant}$$

利用

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial f'} + \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} f' + \frac{\partial^2 F}{\partial f' \partial f'} f''$$

和欧拉方程可得贝尔特拉米恒等式（Beltrami Identity），

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} f' - F \right) = 0$$

由于

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

“广义能量”

$$H = \frac{\partial F}{\partial f'} f' - F$$

不随自变量 x 变化，是常数。

② $F = F(x, f')$ ，“广义动量”是常数，

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = \text{constant}$$

例如最速降线问题的拉格朗日函数

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}$$

不依赖于参数 x ，所以广义能量积分是常数，

$$f' \frac{\partial F}{\partial f'} - F = -\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} = c \implies (1+y'^2)y = c_1$$

可以用来简化求解欧拉方程的步骤。

(4) 多宗量泛函的极值

如果泛函是多宗量的，

$$\Phi[f_1, f_2, \dots, f_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) dx$$

边界 x_1, x_2 固定，并且边值固定，

$$f_\alpha(x_1) = y_{\alpha 1}, \quad f_\alpha(x_2) = y_{\alpha 2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

那么泛函的变分是

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f_\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'_\alpha} \right\} \delta f_\alpha(x) dx$$

把变分基本引理稍作推广，可得致极曲线需要满足的欧拉方程是

$$\frac{\partial F}{\partial f_\alpha} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

若边值可变，则除了欧拉方程外，致极曲线还需满足自然边界条件

$$\left. \frac{\partial F}{\partial f'_\alpha} \right|_{x=x_1, x_2} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

(5) 多重积分型泛函的固定边界驻值

经典场论中需要用到积分型泛函

$$\Phi[f] = \int_D F(x_1, \dots, x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) dV$$

简写成

$$\Phi[f] = \int_D F(x, f, \nabla f) dV$$

其中宗量的边界值 $f(\partial D)$ 已指定； dV 是流形的体积元。

对泛函变分得

$$\begin{aligned} \delta \int_D F(x, f, \nabla f) dV &= \int_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) + \frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)} \cdot \delta[\partial_i f(x)] \right\} dV \\ &= \int_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) + \frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)} \cdot \partial_i[\delta f(x)] \right\} dV \\ &= \int_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} \delta f(x) - \left[\bar{\partial}_i \frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)} \right] \delta f(x) \right\} dV + \int_D \bar{\partial}_i \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)} \delta f(x) \right] dV \end{aligned}$$

注意上式中的负号 $\bar{\partial}_i$ 表示对整个括号中式子求全导数（“全”偏导数），例如第二项是

$$\bar{\partial}_i \left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial(\partial_i f) \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial(\partial_i f) \partial f} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial(\partial_i f) \partial(\partial_j f)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

利用高斯定理（散度定理），

$$\int_D \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_{\partial D} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

得到

$$\delta \int_D F(x, f, \nabla f) dV = \int_D \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial(\nabla f)} \right] \delta f(x) dV + \int_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial(\nabla f)} \delta f(x) \cdot d\vec{S}$$

对于固定边值问题,

$$\delta f(x) = 0, \quad x \in \partial D$$

致极曲面 $f(x_1, \dots, x_n)$ 只需要满足欧拉方程,

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial(\nabla f)} \right) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial f} - \bar{\partial}_{x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)} \right) = 0$$

若边值可变, 由于 $\delta f(\partial D)$ 线性独立, 必须额外满足自然边界条件,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)} n_i \right) \Big|_{x \in \partial D} = 0$$

其中 $\vec{n}$ 是边界面的法向量。

(6) 拉格朗日函数含高阶导数的泛函的不动边界极值

如果拉格朗日函数依赖于宗量的高阶导数, 例如

$$F = F(x, f, f', f'')$$

那么

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f', f'') dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} \delta f + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f' + \frac{\partial F}{\partial f''} \delta f'' \right\} dx \\ &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f + \frac{\partial F}{\partial f''} \delta f' \right\} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f''} \right) \delta f' \right\} dx \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f''} \right) \delta f + \frac{\partial F}{\partial f''} \delta f' \right\} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial f''} \right\} \delta f dx \end{aligned}$$

取极值需满足欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial f''} = 0, \quad x \in (x_1, x_2)$$

以及自然边界条件

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f''} \right) \Big|_{x=x_1, x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial f''} \Big|_{x=x_1, x_2} = 0 \end{cases}$$

对拉格朗日函数含宗量的 n 阶导数的积分型泛函,

$$\Phi[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}) dx$$

若边值固定,

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f^{(n)}(x_1) = y_{n1}, f^{(n)}(x_2) = y_{n2}$$

致极曲线满足的欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f^{(1)}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} \right) = 0$$

如果边值是可变的, 致极曲线还需满足自然边界条件,

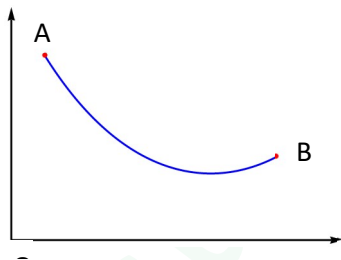
$$\text{当 } x = x_1, x_2 \text{ 时, } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial f^{(1)}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(2)}} \right) + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial f^{(2)}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(3)}} \right) + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} \right) = 0 \\ \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0 \end{cases}$$

4. 泛函的条件极值

例 14 悬链线 (Catenary) (John.Bernoulli, 1690.)

不可伸长的柔性绳, 线密度为 ρ , 长度为 l , 两端挂在 A、B 两个固定点上。求绳子的形状。

解 AB 线段所在的垂直平面内, 以水平方向为 x 轴, 垂直向上为 y 轴, 建立直角坐标系。平衡时, 链的形状 $y = y(x)$ 使得势能取极小。



绳子的势能为

$$V[y] = \int_A^B \rho g y ds = \rho g \int_A^B y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

绳长不变, 得约束条件

$$0 = \Psi[y] = \int_A^B ds - l = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} dx - l$$

由于有约束, $\delta y(x)$ 不独立。引进拉氏乘子, 得

$$\begin{aligned} \delta V + \lambda \delta \Psi &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{yy' + \lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= 0 \end{aligned}$$

我们可以直接求解方程, 也可以利用广义能量积分简化问题。记扩展拉氏函数

$$F(y, y') \triangleq (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}$$

广义能量守恒,

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = (\rho g y + \lambda) \left\{ y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2} \right\} = (\rho g y + \lambda) \frac{-1}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

解出

$$y' = \pm \sqrt{\left(\frac{\rho g y + \lambda}{c} \right)^2 - 1} \Rightarrow \frac{c_1 dy}{\pm \sqrt{(y + \lambda_1)^2 - c_1^2}} = dx$$

积分,

$$c_1 \ln \left(y + \lambda_1 + \sqrt{(y + \lambda_1)^2 - c_1^2} \right) = x + c_2$$

$$y = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + y_0$$

3 个待定常数（2 个积分常数，1 个来自拉氏乘子）由代数方程

$$\begin{aligned} y(x_A) &= y_A, & y(x_B) &= y_B, \\ l &= \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_A^B \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x - x_0}{a}\right)} dx = \int_A^B \cosh\frac{2(x - x_0)}{a} dx \\ &= \frac{a}{2} \sinh\frac{2(x - x_0)}{a} \Big|_{x=x_A}^{x=x_B} \end{aligned}$$

确定。

注：将坐标原点平移，总可以把悬链线方程写成

$$y = a \cosh\frac{x}{a}$$

一些教材上没有严格地按条件极值来处理，得到是这一特解。

此问题也可以用牛顿力学来解。设张力为 $T(x)$ ，水平方向力的平衡：

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} T\right) = 0 \Rightarrow T = \alpha \sqrt{1 + y'^2}$$

垂直方向力的平衡：

$$d\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} T\right) = \rho g \sqrt{1 + y'^2} dx$$

把第一式代入第二式，

$$y'' = \frac{\rho g}{\alpha} \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow y' = \sinh(ax + b)$$

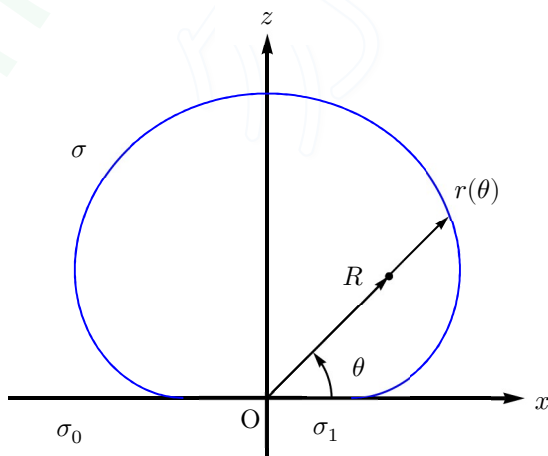
$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax + b) + c$$

$$T = \frac{\rho g}{a} \cosh(ax + b), \quad T_x = \frac{\rho g}{a}, \quad T_y = \frac{\rho g}{a} y' = \frac{\rho g}{a} \sinh(ax + b)$$

例 15 一滴水银静止于水平桌面上，求它的表面形状。

解 ①运动学

设水银的密度为 ρ ，体积为 V_0 ；水银与空气之间的表面张力系数为 σ ，水银与桌面间的表面张力系数为 σ_1 ，桌面与空气之间的表面张力系数为 σ_0 。



由对称性，水银的表面是旋转曲面。取坐标原点为桌面上水银滴的中心点，桌面为 $x-y$ 平面，则水银的表面可以用广义坐标 $r = r(\theta)$ 描述，其中 r 是表面上的点 P 到原点的距离， θ 是 P 点与原点的连线对桌面的夹角， $\theta \in [0, \pi/2]$ 。

水银的形状满足体积为 V_0 的约束条件，而体积 $V[r]$ 则是曲线 $r = r(\theta)$ 的泛函，

$$\begin{aligned} V[r] &= \iiint R^2 dR d(\sin \theta) d\varphi \\ &= 2\pi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{R=0}^{r(\theta)} \cos \theta R^2 dR d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

②势能

按虚功原理，水银的形状应该使得势能 $E[r]$ 最低。势能是重力势能 $V_g[r]$ 和表面能 $V_s[r]$ 之和，

$$E[r] = V_g[r] + V_s[r]$$

其中重力势能为

$$\begin{aligned} V_g[r] &= \iiint R \sin \theta \rho g R^2 dR d(\sin \theta) d\varphi \\ &= 2\pi \rho g \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{R=0}^{r(\theta)} R^3 \sin \theta \cos \theta dR d\theta = \frac{1}{4} \pi \rho g \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin(2\theta) d\theta \end{aligned}$$

总表面能为液气分界面积 S_1 、液固分界面积 S_2 和气固分界面积 $S_0 - S_2$ 的表面能之和，

$$\begin{aligned} V_s[r] &= \sigma S_1 + \sigma_1 S_2 + \sigma_0 (S_0 - S_2) = \sigma S_1 + (\sigma_1 - \sigma_0) S_2 + \sigma_0 S_0 \\ &= \sigma \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r \cos \theta \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2} + (\sigma_1 - \sigma_0) \pi (r(0))^2 + \sigma_0 S_0 \\ &= 2\pi \sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{r'^2 + r^2} \cos \theta d\theta + (\sigma_1 - \sigma_0) \pi (r(0))^2 + \sigma_0 S_0 \end{aligned}$$

③虚功原理

由虚功原理，液面形状满足

$$\delta \Phi[r] = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi &\stackrel{\text{def}}{=} V_g[r] + V_s[r] + \lambda (V[r] - V_0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\{ \frac{1}{4} \pi \rho g r^4 \sin(2\theta) + \left(2\pi \sigma r \sqrt{r'^2 + r^2} + \frac{2\pi}{3} \lambda r^3 \right) \cos \theta \right\} + (\sigma_1 - \sigma_0) \pi (r(0))^2 + \sigma_0 S_0 \\ &\quad - \lambda V_0 \end{aligned}$$

其中 λ 是拉格朗日乘子。

记扩展拉格朗日函数为

$$F(\theta, r, r') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} \pi \rho g r^4 \sin(2\theta) + \left(2\pi \sigma r \sqrt{r'^2 + r^2} + \frac{2\pi}{3} \lambda r^3 \right) \cos \theta$$

④计算变分

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\{ \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial r'} \right\} \delta r + \left(\frac{\partial F}{\partial r'} \delta r \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + 2\pi (\sigma_1 - \sigma_0) r(0) \delta r(0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\{ \pi \rho g \sin(2\theta) r^3 + \left(\sigma \sqrt{r'^2 + r^2} + \sigma \frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} + \lambda r^2 \right) 2\pi \cos \theta - 2\pi \sigma \frac{d}{d\theta} \frac{r r' \cos \theta}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \right\} \delta r \\ &\quad + 2\pi \sigma \left(\frac{r r' \cos \theta}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \delta r \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + 2\pi (\sigma_1 - \sigma_0) r(0) \delta r(0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\{ \rho g \sin(2\theta) r^3 + \left(2\sigma \sqrt{r'^2 + r^2} + 2\sigma \frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} + 2\lambda r^2 \right) \cos \theta - 2\sigma \frac{d}{d\theta} \frac{r r' \cos \theta}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \right\} \pi \delta r \\ &\quad + \left\{ -\sigma \frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0) + r^2(0)}} + (\sigma_1 - \sigma_0) \right\} 2\pi r(0) \delta r(0) \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\{ \rho g \sin(2\theta) r^2 + 2\lambda r \cos \theta + \frac{2\sigma \cos \theta}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} (2r^3 + 3r'^2 r - r'' r^2) + 2\sigma \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \sin \theta \right\} \pi r \delta r$$

$$+ \left\{ -\sigma \frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0) + r^2(0)}} + (\sigma_1 - \sigma_0) \right\} 2\pi r(0) \delta r(0)$$

得欧拉方程

$$\left\{ \rho g \sin(2\theta) r^2 + 2\lambda r \cos \theta + 2\sigma \frac{\cos \theta}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} (2r^3 + 3r'^2 r - r'' r^2) + 2\sigma \frac{r' \sin \theta}{\sqrt{r'^2 + r^2}} \right\} \pi r = 0,$$

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

和自然边界条件

$$\left\{ -\sigma \frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0) + r^2(0)}} + (\sigma_1 - \sigma_0) \right\} r(0) = 0$$

⑤排除冗余解

微分方程成立的一个可能是 $r(\theta) = 0$ ，但这不是物理解，而是泛函 $V[r]$ 的极大值。能量最低状态满足方程

$$\frac{1}{2} \rho g \sin(2\theta) r^2 + \lambda r \cos \theta + \sigma r \cos \theta \frac{2r^2 + 3r'^2 - r'' r}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} + \sigma \frac{r' \sin \theta}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = 0$$

$r(0) = 0$ 的边界条件不对应能量极小，此时液滴和桌面接触只有一个点，压强无穷大。所以自然边界条件是

$$-\sigma \frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0) + r^2(0)}} + (\sigma_1 - \sigma_0) = 0$$

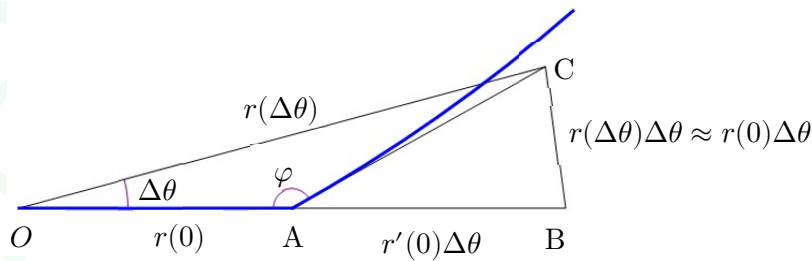
⑥自然边界条件的含义

边界条件中的分式有具体的几何意义。如图所示，

$$\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0) + r^2(0)}} = \cos(\pi - \varphi)$$

φ 为浸润角，边界条件可以写成

$$\cos \varphi = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma}$$



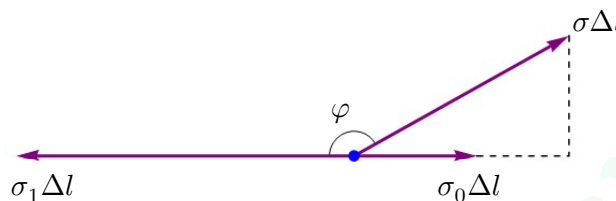
在材料力学中，此边界条件称为杨氏方程式。托马斯·杨是通过分析三相边界点处表面张力的平衡条件得到这个式子的¹。

如图所示，在气液固三相相交的圆周上取长度为 Δl 的线段，线段上液体的重力可以忽略不计，在三个表面张力的作用下保持平衡。水平方向力的平衡条件是

¹T. Young, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1805,95,65.

$$\sigma \Delta l \cos(\pi - \varphi) + \sigma_0 \Delta l = \sigma_1 \Delta l$$

上式直接给出杨氏方程式。



可是垂直方向的合力却不是零。用表面“张力”解释此边界条件会导致矛盾。只有用表面能的概念来解释才是自洽的。

⑦用数值方法求解

在微分方程中令 $\theta = \pi/2$ ，可得

$$\frac{r'(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{r'^2(\frac{\pi}{2}) + r^2(\frac{\pi}{2})}} = 0 \Rightarrow r'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

上表面正中间的点切面和水平面夹角为 0。

求解微分方程后，代入约束条件 $V[r] = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos \theta d\theta = V_0$ ，可确定参数 λ 。

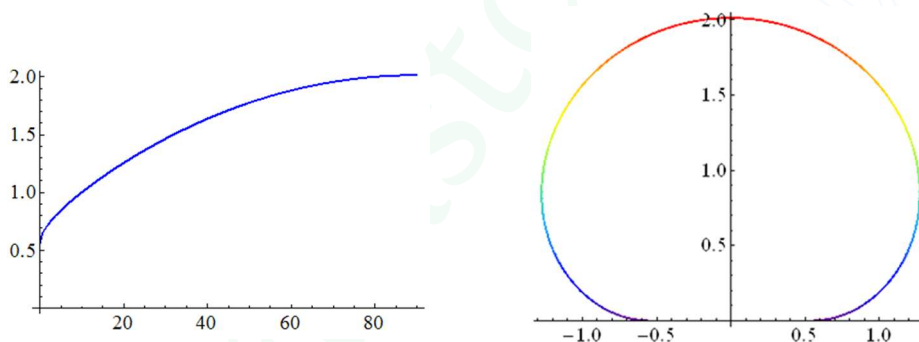


图 1 水银滴在水平玻璃上的形状

这个微分方程可以用数值方法求解。上图是用 Runge-Kutta 法做数值计算，求出的水银滴在水平玻璃上的形状。计算中取 $\rho = 13.6 \times 10^3$, $g = 9.8$, $\sigma = 0.49$ ，水银与玻璃的接触角为 180° ，水银的质量为 0.1 克。左图中横轴 θ 的单位是度，竖轴 $r(\theta)$ 的单位是毫米；右图是水银滴的形状，单位是毫米。

⑧级数解法

由于水银与玻璃完全不浸润，接触角为 π ，即

$$\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0) + r^2(0)}} = 1 \Rightarrow r'(0) = +\infty$$

$r(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处有奇异性，不能简单地展开为泰勒级数，

$$r(\theta) \neq r(0) + r'(0)\theta + \dots$$

为了分析 $r(\theta)$ 在 $\theta \approx 0$ 附近地渐近行为，设 $\theta \approx 0$ 时， $r(\theta)$ 的渐进表达式是

$$\begin{aligned} r(\theta) &\approx c_0 + c_1 \theta^\alpha + o(\theta^\alpha), \quad \alpha \in [0, 1) \\ r'(\theta) &\approx c_1 \alpha \theta^{\alpha-1}, \quad r''(\theta) \approx c_1 \alpha (\alpha - 1) \theta^{\alpha-2} \end{aligned}$$

将微分方程

$$\rho g \sin(2\theta) r^2 + 2\lambda \cos \theta r + 2\sigma \frac{\cos \theta}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} [2r^2 + 3r'^2 - r''r]r + 2\sigma \frac{r' \sin \theta}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = 0$$

的左边只保留到领头项 (leading term) ,

$$\mathcal{O}(\epsilon^1) + 2\lambda r + 2\sigma \frac{1}{r'^3} [3r'^2 - r''r]r + \mathcal{O}(\epsilon^1) \approx 2r \left\{ \lambda + \sigma \frac{1}{r'^3} [-r''r] \right\} = 0$$

上式最后一步等式中舍弃 r'^2 项的原因是

$$r'^2 \propto \theta^{2(\alpha-1)}, \quad r''r \propto \theta^{\alpha-2}$$

$$2(\alpha-1) - (\alpha-2) = \alpha > 0$$

与 $r''r$ 相比, r'^2 是高阶小量。又由于 $r(0) \neq 0$, 只能是

$$\lambda - \sigma \frac{r''r}{r'^3} = 0$$

由此得指标方程 (indicial equation) ,

$$\lambda - \frac{\sigma c_0 c_1 \alpha (\alpha-1) \theta^{\alpha-2}}{c_1^3 \alpha^3 \theta^{3\alpha-3}} = \lambda - \frac{\sigma c_0 (\alpha-1)}{c_1^2 \alpha^2} \theta^{-2\alpha+1} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{2\sigma c_0}{c_1^2} < 0$$

r 是 $\sqrt{\theta}$ 的幂级数。

考虑到左右镜像对称, 可以令幂级数展开式是

$$r(\theta) = c_0 + c_1 \sqrt{\theta(\pi-\theta)} + \frac{1}{2!} c_2 \theta(\pi-\theta) + \frac{1}{3!} c_3 [\theta(\pi-\theta)]^{3/2} + \frac{1}{4!} c_4 [\theta(\pi-\theta)]^2 + \dots$$

把级数展开式代入微分方程, 并将微分方程左边按 $\sqrt{\theta(\pi-\theta)}$ 的级数展开, 得

$$\lambda \rightarrow -\frac{2\sigma c_0}{\pi c_1^2}, c_2 \rightarrow \frac{4c_1^2}{3c_0}, c_3 \rightarrow \frac{g\rho c_1^3}{4\sigma} + \frac{23c_1^3}{12c_0^2} + \frac{3c_1}{\pi^2} - \frac{3c_0^2}{\pi^2 c_1}, c_4 \rightarrow \frac{13g\rho c_1^4}{5\sigma c_0} + \frac{103c_1^4}{45c_0^3} + \frac{16c_1^2}{\pi^2 c_0} - \frac{48c_0}{5\pi^2}, \dots$$

保留到 c_9 项, 再由欧拉方程 (在 $\theta = \pi/2$ 处求导) 和质量是0.1克约束得

$$r''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{g\rho r^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sigma} + \frac{\lambda r^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sigma} + r\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{2\pi}{3} \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos \theta d\theta = 0.0001$$

解出

$$r(\theta) = 0.562551 + 0.422487\sqrt{(\pi-\theta)\theta} + 0.211530(\pi-\theta)\theta + 0.0604328((\pi-\theta)\theta)^{3/2}$$

$$+ 0.0173699(\pi-\theta)^2\theta^2 - 0.00202953((\pi-\theta)\theta)^{5/2} - 0.000561428(\pi-\theta)^3\theta^3$$

$$- 0.00164894((\pi-\theta)\theta)^{7/2} + 0.000268766(\pi-\theta)^4\theta^4 - 0.000320324((\pi-\theta)\theta)^{9/2} (\text{毫米})$$

两个独立系数 c_0, c_1 .

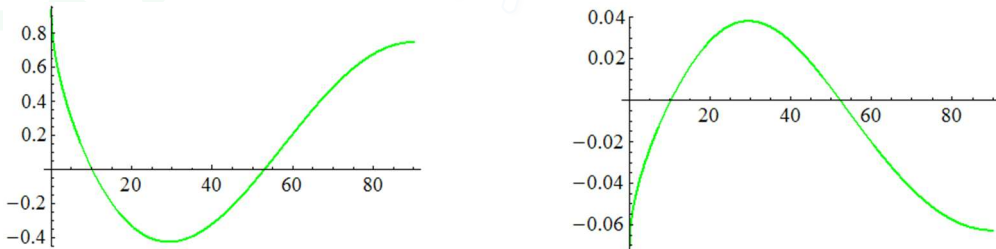


图 2 级数解与精确解的比较

上图中，横轴单位是度；竖轴为级数解法 $r(\theta)$ 的相对误差，单位为 1%。左图是保留到 c_5 的相对误差，右图是保留到 c_9 的相对误差。与数值计算的高精度结果比较，展开式的误差 $<0.06\%$ 。将级数保留更多项，可以得到更准确的公式。

(1) 等周问题

求泛函极值

$$\Phi[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f') dx$$

其中的宗量 $f(x)$ 满足边界条件

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$$

和约束条件

$$\Psi[f] = \int_{x_1}^{x_2} G(x, f, f') dx = a$$

这类问题称为等周问题 (Isoperimetric Problem)。

引进拉格朗日乘子，转化为无条件极值问题，

$$\delta\{\Phi + \lambda(\Psi - a)\} = 0$$

定义扩展拉氏函数为

$$H = F + \lambda G$$

最终得到欧拉方程

$$\frac{\partial H}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial f'} \right) = 0$$

这是一个二阶常微分方程，两个积分常数和拉氏乘子 λ 可以由边界条件以及约束条件确定。

注 ①这里欧拉方程不仅给出了 $\Phi[f]$ 的极值点，还给出了 $\Psi[f]$ 的极值点，必须剔除。上面的例子就是这样。

②固定 $\Psi[f]$ 求 $\Phi[f]$ 极大值，与固定 $\Phi[f]$ 求 $\Psi[f]$ 的极小值，这两个对偶问题的欧拉方程相同。

(2) 不独立宗量泛函的极值

求积分型泛函

$$\Phi[f_1, f_2, \dots, f_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_n(x)) dx$$

的致极曲线，宗量满足约束方程

$$G(x, f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_n(x)) = 0, \quad x \in [x_1, x_2]$$

引入拉格朗日乘子 $\lambda(x)$ 和扩展朗格朗日函数

$$H = F + \lambda(x)G$$

成为普通极值问题，

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} H(x, f, f') dx = 0$$

得欧拉方程

$$\frac{\partial H}{\partial f_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial f'_i} \right) = 0$$

5. 可动边界泛函的极值

(1) 可动边界的泛函极值

考虑积分型泛函

$$\Phi[f, x_1, x_2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f') dx$$

其中的积分边界可变。

计算变分，

$$\delta\Phi[f, x_1, x_2] = \left(F\Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f \right) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f(x) \right\} dx$$

极值条件为

$$\left(F\Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f(x) \right\} dx = 0$$

可以把边界条件用全变分的符号写成

$$\left\{ - \left(\frac{\partial F}{\partial f'} f' - F \right) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'} \Delta f \right\} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

如果端点和边界值完全自由，有横截条件

$$\left(\frac{\partial F}{\partial f'} f' - F \right) \Big|_{x=x_1, x_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{x=x_1, x_2} = 0$$

以及欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0, \quad x \in (x_1, x_2)$$

(2) 边界有约束的可动边界问题

例 16 两个圆环挂在一个竖直平面内，固定不动。把一根绳子的两端分别拴在两个圆环上，并可以自由滑动。求绳子形状所满足的微分方程和方程的边界条件。

求泛函

$$\Phi[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f') dx$$

的极值条件，其中端点满足

$$f(x_1) = \varphi_L(x_1), \quad f(x_2) = \varphi_R(x_2)$$

可以理解为

$$x_i = x_i[f], \quad i = 1, 2$$

是泛函。

对可动边界的积分型泛函变分，可以用全变分符号写成

$$\Delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f') dx = \left\{ \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'} \Delta f \right\} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \delta f(x) dx$$

当边界点需要满足约束方程时， Δx_i 与 $\Delta f(x_i)$ 不独立。

先考虑端点 x_1 ，对边界的约束方程

$$f(x_1) = \varphi_L(x_1)$$

作全变分得

$$\Delta f(x_1) = \Delta \varphi_L(x_1) = \varphi'_L(x_1) \Delta x_1$$

同样，对端点 x_2 有

$$\Delta f(x_2) = \varphi'_R(x_2)\Delta x_2$$

代入 $\Delta\Phi$ 后,

$$\begin{aligned}\Delta\Phi = & \left\{ \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{\partial F}{\partial f'} \varphi'_R \right) \Delta x \right\} \Big|_{x=x_2} - \left\{ \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{\partial F}{\partial f'} \varphi'_L \right) \Delta x \right\} \Big|_{x=x_1} \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \delta f(x) dx\end{aligned}$$

泛函取驻值时, 有

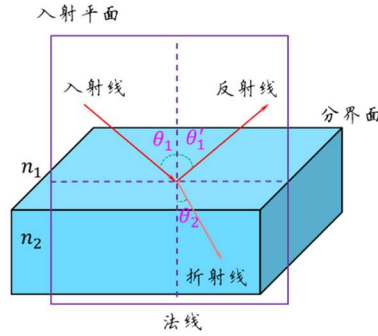
$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0, \quad x \in (x_1, x_2) \text{ (Euler 方程)}$$

$$\left\{ F + (\varphi'_L - f') \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \Big|_{x=x_1} = 0, \quad \left\{ F + (\varphi'_R - f') \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \Big|_{x=x_2} = 0 \text{ (横截条件)}$$

含有高阶导数 ($F = F(x, f, f', f'')$), 或者边界条件为隐函数的情形, 可作类似推导。

(3) 有角点的致极曲线

对一些泛函极值问题, 致极曲线有可能在某些点处导数不连续, 即存在**角点** (vertex, corner point)。这时不能直接利用拉格朗日变分基本引理。



光线的反射点或折射点是角点

存在潜在的角点时, 需要把泛函写成分区间的积分,

$$\begin{aligned}\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f') dx &= \delta \int_{x_1}^c F dx + \delta \int_c^{x_2} F dx \\ &= - \left\{ \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'} \Delta f \right\} \Big|_{c-}^{c+} + \int_{x_1}^c \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \delta f(x) dx \\ &\quad + \int_c^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \delta f(x) dx\end{aligned}$$

这里我们暂且假设致极曲线最多只有一个角点 c 。存在多个角点的情况可以类似地讨论。

曲线 $y = f(x)$ 是连续的, 变形后也没有断开, 即有

$$\begin{aligned}\Delta x(c-) &= \Delta x(c+) = \Delta c \\ \Delta f(c-) &= \Delta f(c+) = \Delta f(c)\end{aligned}$$

上式即

$$\delta f(c-) + f'(c-) \Delta c = \delta f(c+) + f'(c+) \Delta c$$

可见由于角点处 $f'(x)$ 不连续, $\delta f(x)$ 在角点也不连续。

Δc 和 $\Delta f(c)$ 互相独立时,

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, f, f') dx &= - \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{c-}^{c+} \Delta c + \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{c-}^{c+} \Delta f(c) + \int_{x_1}^c \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \delta f(x) dx \\ &\quad + \int_c^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right\} \delta f(x) dx \end{aligned}$$

在点 c 处，致极曲线满足 Weierstrass-Erdmann 角点条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{c-} &= \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{c+} \\ \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{c-} &= \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{c+} \end{aligned}$$

实际上无论 $f'(x)$ 在 $x=c$ 是否连续，角点条件总是正确的。有角点时，需要分段求解欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} = 0, \quad x \in (x_1, c) \cup (c, x_2)$$

并利用角点条件衔接各段函数。

6. 微分方程与泛函极值

前面我们求解问题的方法，都是把泛函极值问题转化为微分方程。其实求泛函极值，在很多情况下要比求解微分方程方便。

下面的定理把微分方程转化为泛函极值问题：

定理 设 $\hat{A}$ 是正定的对称线性算符（或正定的厄米算符，对于复函数空间），即

$$(\hat{A}f, g) = (\hat{A}g, f), \quad (\hat{A}f, f) = \begin{cases} > 0, & f(x) \not\equiv 0; \\ = 0, & f(x) \equiv 0, \end{cases}$$

则①方程 $\hat{A}f = \varphi$ 如果有解 $f(x)$ ，则此解唯一；② $\hat{A}f = \varphi \Leftrightarrow f$ 使得泛函 $\Phi[f] \triangleq (\hat{A}f, f) - 2(f, \varphi)$

取极小值。

例 17 Sturm-Liouville 方程

$$\frac{d}{dx}(py') + qy + \lambda wy = 0$$

其中 λ 是特征值。

从方程读出算子是

$$\hat{A} = \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x) + \lambda w(x)$$

所以泛函是

$$\begin{aligned} \Psi[y] &= \int_a^b (\hat{A}y(x)) y(x) dx = \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} y(x) + q(x)y(x) + \lambda w(x)y(x) \right\} y(x) dx \\ &= \int_a^b \left\{ y \frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y^2 + \lambda w(x)y^2 \right\} dx \end{aligned}$$

对第一项作分部积分并舍弃边界项，

$$\Psi[y] = \int_a^b \{-p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda w(x)y^2\} dx$$

$\Psi[y]$ 取极值的条件，等价于泛函

$$\Phi[y] = \int_a^b \{p(x)y'^2 - q(x)y^2\} dx$$

在归一化条件

$$\int_a^b w(x)y^2 dx = 1$$

下取极值。

7. 泛函驻值的数值解法

(1) 里兹法

仍以水银滴为例，设

$$r(\theta) = c_0 + c_1 \sqrt{(\pi - \theta)\theta} + \frac{c_2}{2!} (\pi - \theta)\theta + \cdots + \frac{1}{9!} c_9 [(\pi - \theta)\theta]^{9/2}$$

于是代入泛函后势能 $E = E(c_0, c_1, \dots, c_9)$ ，体积 $V = V(c_0, c_1, \dots, c_9)$ ，成为普通函数的极值问题，可求得（1 克水银的形状）

$$\begin{aligned} r(\theta) = & 2.2002 + 0.56660\sqrt{(\pi - \theta)\theta} + 2.9444(\pi - \theta)\theta - 6.2809((\pi - \theta)\theta)^{3/2} + 6.8421(\pi - \theta)^2\theta^2 \\ & - 3.6038((\pi - \theta)\theta)^{5/2} + 0.59563(\pi - \theta)^3\theta^3 + 0.064256((\pi - \theta)\theta)^{7/2} \\ & - 0.0081378(\pi - \theta)^4\theta^4 - 0.0015615((\pi - \theta)\theta)^{9/2} \end{aligned}$$

这种解法称为里兹（Ritz）法：选取一组合适的坐标函数 $l_i(x)$ ，将泛函的宗量展开为

$$f(x) \approx c_1 l_1(x) + c_2 l_2(x) + \cdots + c_n l_n(x)$$

把泛函极值问题，转化为普通函数的极值问题。

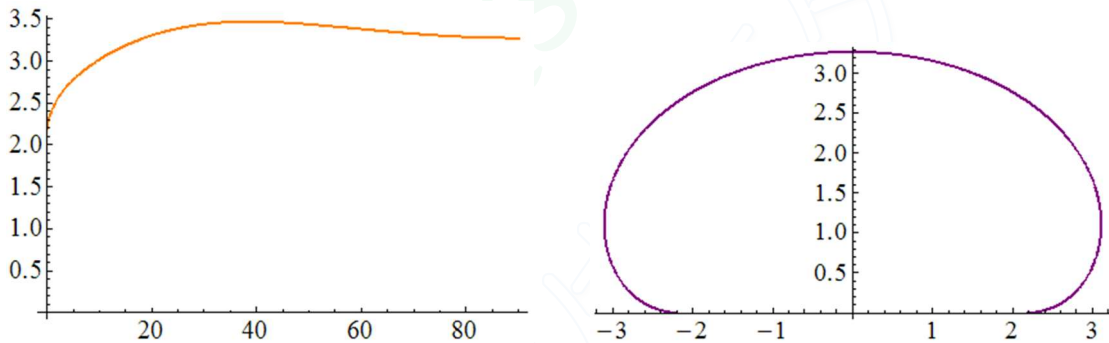


图 3 1 克水银在水平玻璃板上的形状

(2) 欧拉有限差分法、有限元法

对固定边界问题

$$\Phi[f] = \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx$$

$$f(a) = y_a, \quad f(b) = y_b$$

可以用欧拉有限差分法，把区间 $[a, b]$ 分成 $n+1$ 等份，端点函数值固定不变，其余等分点上的值设为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，而导数则表示为

$$f'(x_i) = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(b-a)/(n+1)}$$

把泛函表示成差分形式，

$$\Phi[f] = \frac{b-a}{n+1} \sum_{i=0}^n F(x_i, y_i, f'(x_i))$$

成为普通函数的极值问题，取极值的条件是 $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0$ 。

如果利用多项式插值得到 $f(x)$ 在非节点上的值，会比欧拉法收敛快，此为**有限元法**。对平面区域，通常划分为三角形的网格；对更高维的流形，可剖分为单纯形（simplex）。

三、 最小作用量原理

1. 哈密顿原理

在拉格朗日力学建立 46 年之后，爱尔兰的数学家、物理学家哈密顿（Sir William Rowan Hamilton）在 1834 年和 1835 年的两篇文章中提出了哈密顿原理。

由前面的讨论知，保守系统的拉格朗日方程，与欧拉方程的形式完全相同——所以拉氏方程也可以用泛函的极值条件得到。

定义**作用量**（action functional, action）为

$$S[q] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt$$

其中边界条件为

$$q_\alpha(t_1) = q_{\alpha 1}, \quad q_\alpha(t_2) = q_{\alpha 2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

哈密顿变分即固定边界和边值的简单变分： t_1, t_2 固定，且

$$\delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2) = 0$$

真实的物理路径使得作用量取极值，

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt = 0$$

这一原理称为**哈密顿原理**或**最小作用量原理**（principle of least action）。

对同时有保守力和非保守力的系统，将拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{\text{nc}}$$

两边同乘 δq_α ，并对 t 积分，得对应的变分原理是

$$\delta S = - \int_{t_1}^{t_2} Q_\alpha^{\text{nc}} \delta q_\alpha dt$$

如果广义坐标不独立，满足完整约束

$$f_\sigma(t, q) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k$$

引入拉氏乘子和扩展拉格朗日函数

$$L_{\text{ext}} \stackrel{\text{def}}{=} L + \lambda_\sigma f_\sigma$$

定义作用量

$$S[q, \lambda] := \int_{t_1}^{t_2} L_{\text{ext}} dt$$

那么拉氏方程可由最小作用量原理

$$\delta S[q, \lambda] = 0$$

得到。与无约束的系统没有什么不同。

2. 非完整约束系统的哈密顿原理

设系统满足变分约束条件

$$c_{\sigma\alpha}\delta q_\alpha = 0$$

并且运动方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_\sigma(t)c_{\sigma\alpha}(t, q)$$

那么变分原理是

$$\delta S + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_\sigma c_{\sigma\alpha} \delta q_\alpha dt = 0$$

对于有非完整约束的力学系统，**不能简单地套用完整约束系统的变分原理**、直接引进拉氏乘子和扩展拉格朗日函数写出运动方程。

关于这一点，戈德斯坦和柯朗的教材中的说法不正确。

例 18 可以利用斜坡冰橇的例子加以验证，两种方法给出的运动方程矛盾。

$$L = \frac{1}{2}M\dot{v}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\omega}^2 - V = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgy \sin \alpha$$

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0, \quad \sin \theta \delta x - \cos \theta \delta y = 0$$

物理运动满足（ $\mu(t)$ 是拉氏乘子）拉格朗日方程

$$\begin{cases} M\ddot{x} = \mu \sin \theta \\ M\ddot{y} + Mg \sin \alpha = -\mu \cos \theta \\ I\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

如果按照戈德斯坦等人或者数学教材（例如柯朗、希尔伯特的《数学物理方法》）中的方法，取扩展拉氏函数

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgy \sin \alpha + \lambda(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta)$$

得到的欧拉方程为

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -\dot{\lambda} \sin \theta - \lambda \dot{\theta} \cos \theta \\ M\ddot{y} + Mg \sin \alpha = \dot{\lambda} \cos \theta - \lambda \dot{\theta} \sin \theta \\ I\ddot{\theta} = \lambda(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \end{cases}$$

前两个方程的右边第二项

$$(-\lambda \dot{\theta} \cos \theta, -\lambda \dot{\theta} \sin \theta)$$

是平行于冰刀方向的约束力；最后一个方程的右边

$$\lambda(t)(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)$$

是约束力的力矩，这都应该为零。可见扩展拉氏函数得出的解是错误的。

讨论：柯朗和希尔伯特、戈德斯坦等人（Goldstein 3ed p46, J. Ray, Amer. J. Phys. 34(406-8), 1966.）

直接将扩展拉格朗日函数用于非完整力学系统，

$$f_\sigma(t, q, \dot{q}) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{L + \lambda_\sigma f_\sigma\} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \lambda_\sigma \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right) - \dot{\lambda}_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha} \right] \delta q_\alpha + f_\sigma \delta \lambda_\sigma \right\} dt = 0$$

$$\Rightarrow f_\sigma = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_\sigma \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] - \dot{\lambda}_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

可是即使对线性非完整约束，这方程也不一定正确。

考虑力学中的线性非完整约束，按 Hölder 规则，

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha = 0$$

因此仅当前述方程中的项

$$\lambda_\sigma \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] = 0$$

才能得到正确的运动方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\dot{\lambda}_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \equiv 0 \Leftrightarrow f(t, q, \dot{q}) = \frac{d\varphi(t, q)}{dt}$$

即要求这个约束可积，

$$\varphi(t, q) = c$$

是完整约束；也就是说 Goldstein 用在非完整系统上的扩展拉格朗日函数，只对完整约束系统才是无条件正确的。

3. 第一原理

以最小作用量原理作为物理理论第一原理，有诸多优点：

- ①简洁，作用量包含了全部动力学信息。
- ②参数不变性：作用量

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt$$

不依赖于广义坐标的选取。

我们可以取新的广义坐标 $q'_\alpha = q'_\alpha(t, q)$ ，得到新的拉氏函数，

$$\tilde{L}(t, q', \dot{q}') = L \left(t, q_\alpha(t, q), \frac{\partial q_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial q'_\beta} \dot{q}'_\beta \right)$$

等价地描述同一个动力学系统。

这使得可以方便地讨论协变性。

- ③能推广到其它非力学物理系统，如电动力学，弹性力学，场论等，以及工程和社会学科。

朗道和阿诺德的教材，是从最小作用量原理开始演绎推理。这样可起到“会当凌绝顶，一览众山小”的效果。



相比于归纳方式，这样的讲解对初学者的理解会有一定门槛。演绎方式更适合进阶学习者。

讨论：

①局部与整体：Euler, Maupertuis 神创论

②规范项

从变分的角度来看，拉氏函数的不确定性是很明显的，

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(L(t, q, \dot{q}) + \frac{d\varphi(t, q)}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt + \varphi(t_2, q(t_2)) - \varphi(t_1, q(t_1))$$

边界项的哈密顿变分为零，

$$\delta\varphi(t_1, q(t_1)) = \frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha} \bigg|_{t_1} \delta q_\alpha(t_1) = 0$$

$$\delta\varphi(t_2, q(t_2)) = \frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha} \bigg|_{t_2} \delta q_\alpha(t_2) = 0$$

因此规范项不会改变运动方程。

例 19 时间作为广义坐标

前面我们一直以时间作为参数，建立理论模型和运动方程。但实际上完全可以把时间看作广义坐标，

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} t$$

引进形式参数 λ ，以描述系统在广义坐标空间的一维轨迹，

$$q_a = q_a(\lambda), \quad a = 0, 1, \dots, n$$

作用量无需变更，

$$S = \int_{t=t_1}^{t=t_2} L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt = \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} L\left(q_0, q, \frac{dq/d\lambda}{dq_0/d\lambda}\right) \frac{dq_0}{d\lambda} d\lambda$$

即在新变量下，

$$S[q(\lambda)] = \int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} \tilde{L}(q, \dot{q}) d\lambda$$

$$\tilde{L} \stackrel{\text{def}}{=} L\left(q_0, q, \frac{dq/d\lambda}{dq_0/d\lambda}\right) \frac{dq_0}{d\lambda}$$

读者可自行写出拉格朗日方程，以验证与原描述完全等价。

4. 作用量的极值性

哈密顿原理又称为最小作用量原理。那么真实路径是否使得作用量 $S[q]$ 取了最小值？我们能够得到的结论如下：

在始末位置足够接近时，真实的物理路径使得 Hamilton 作用量取极小。

证明可参考 A. И. 马尔契夫《理论力学》p337。严格的证明需计算 $\delta^2 S$ 。

一般来说，真实路径会使得作用量取极小或驻值，但不可能是极大值。

例 20 质点在引力场中自由下落

拉氏函数和作用量是

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$
$$S[x] = \int_0^T L dt = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \right\} dt$$

真实运动是匀加速运动，

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad \dot{x}(t) = gt$$
$$S_1 = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 \right\} dt = \frac{1}{3}mg^2T^3$$

作为对比路径，必须满足始末端点相同，

$$x(0) = 0, \quad x(T) = \frac{1}{2}gT^2$$

取匀速运动路径，即

$$x(t) = \frac{1}{2}gTt, \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{2}gT$$
$$S_2 = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}gT\right)^2 + mg\left(\frac{1}{2}gTt\right) \right\} dt = \frac{3}{8}mg^2T^3$$

假想运动的作用量，大于真实运动的作用量，

$$S_2 > S_1$$

四、 广义经典力学

1. 运动方程

以哈密顿原理为第一原理。设 $L = L(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$ ，且固定 t_1, t_2 时刻的坐标和速度，可得欧拉-拉格朗日方程，

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

连续体系的广义经典力学，在弹性力学和某些非线性波动问题中有应用。

推论： q_α 是循环坐标，则广义动量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} \right)$$

是守恒量。

2. 广义能量积分

设

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$$

计算 dL/dt ，并利用 Euler-Lagrange 方程，可得

$$H = \ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = \text{constant}$$

3. 更高阶的 EULER-LAGRANGE 方程

对于高阶系统，

$$L = L(t, q, \dot{q}, \dots, q^{(n)})$$

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{(n)}} + \dots - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

广义能量和广义动量为²

$$H = \sum_{i=0}^n p_{\alpha,i} \dot{q}_\alpha^{(i)} - L$$

$$p_{\alpha,i} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{(i+j)}}$$

五、 拉格朗日光学

1. 几何光学的费马原理

早在 1662 年，法国数学家费马就提出，几何光学三定律等价于：

光线的真实路径是耗时取极值的路径。

费马原理是变分法思想的先驱。用现代的变分法语言来表述，光线的真实路径满足

$$t_{AB}[x, y, z] \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B \frac{ds}{v(x, y, z)}, \quad \delta t_{AB} = 0$$

其中 $v(x, y, z)$ 是介质中点 (x, y, z) 处的光速， $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ 是路径曲线上的弧长微元。

利用光速 v 与折射率 n 的关系 $v = c/n$ (c 是真空中光速)，费马原理可以等价地写成为

$$l_{AB}[x, y, z] \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B n(x, y, z) ds, \quad \delta l_{AB} = 0.$$

即真实路径的光程取极值。

例 用费马原理推导反射定律。

不妨设两种介质的分界面在 xy -平面，分界面法向为 z -轴。

设光线为连续函数

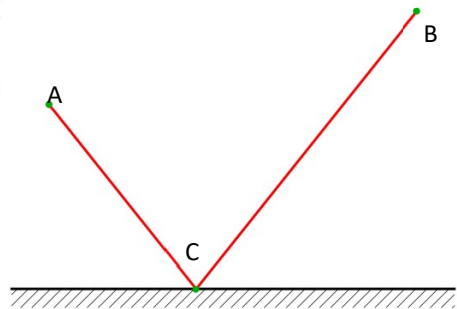
$$\vec{x} = \vec{x}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad \lambda \in [\lambda_A, \lambda_B]$$

界面上的点 C 可能是角点，光程需写成分段积分，

$$l_{AB}[\vec{x}, \lambda_C] = \int_{\lambda_A}^{\lambda_C} n|\dot{\vec{x}}| d\lambda + \int_{\lambda_C}^{\lambda_B} n|\dot{\vec{x}}| d\lambda$$

其中 $\dot{\vec{x}} \stackrel{\text{def}}{=} d\vec{x}/d\lambda$ 。

广义动量和广义能量是



² Manuel DE Leon and Paulo R. Rodrigues, Generalized Classical Mechanics and Field Theory 1985.

$$\vec{p} = n \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \quad H = 0$$

代入光程的变分，得

$$\delta l_{AB} = 0 \cdot \Delta \lambda_c - \frac{n}{|\dot{\vec{x}}|} (\dot{x}_i \Delta x_i) \Big|_{\lambda_C^-}^{\lambda_C^+} + \int_{\lambda_A}^{\lambda_C} n \left(-\frac{d}{d\lambda} \frac{\dot{x}_i}{|\dot{\vec{x}}|} \right) \delta x_i d\lambda + \int_{\lambda_C}^{\lambda_B} n \left(-\frac{d}{d\lambda} \frac{\dot{x}_i}{|\dot{\vec{x}}|} \right) \delta x_i d\lambda$$

光线是连续曲线，所以

$$\Delta x_i(\lambda_C -) = \Delta x_i(\lambda_C +), \quad i = 1, 2, 3$$

C 点位于 xy -平面，

$$z(\lambda_C) = 0, \quad \Delta z(\lambda_C) = 0$$

代入前面的表达式，

$$\begin{aligned} \delta l_{AB} = & \frac{n}{|\dot{\vec{x}}|} \{ [\dot{x}(\lambda_C +) - \dot{x}(\lambda_C -)] \Delta x(\lambda_C) + [\dot{y}(\lambda_C +) - \dot{y}(\lambda_C -)] \Delta y(\lambda_C) \} \\ & + \int_{\lambda_A}^{\lambda_C} n \left(-\frac{d}{d\lambda} \frac{\dot{x}_i}{|\dot{\vec{x}}|} \right) \delta x_i d\lambda + \int_{\lambda_C}^{\lambda_B} n \left(-\frac{d}{d\lambda} \frac{\dot{x}_i}{|\dot{\vec{x}}|} \right) \delta x_i d\lambda \end{aligned}$$

利用费马原理 $\delta l_{AB} = 0$ ，并且取 $d\lambda = ds$ 为弧长， $|\dot{\vec{x}}| = 1$ ，得欧拉方程

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{0}, \quad \lambda \in (\lambda_A, \lambda_C) \cup (\lambda_C, \lambda_B)$$

解欧拉方程，知 AC 和 CB 均为直线。

角点条件是

$$\dot{x}(\lambda_C +) = \dot{x}(\lambda_C -), \quad \dot{y}(\lambda_C +) = \dot{y}(\lambda_C -)$$

把角点条件与弧长参数满足的等式

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1, \quad \lambda \in (\lambda_A, \lambda_C) \cup (\lambda_C, \lambda_B)$$

联立可得

$$\dot{z}^2(\lambda_C +) = \dot{z}^2(\lambda_C -) \Rightarrow \dot{z}(\lambda_C +) = \pm \dot{z}(\lambda_C -)$$

取正号表示光线会进入下方介质，不是反射，因此只能取

$$\dot{z}(\lambda_C +) = -\dot{z}(\lambda_C -)$$

入射角与反射角相等。

利用上式，得出射光线的方向 $(d\vec{x}/d\lambda)|_{\lambda_C+}$ 、入射光线的方向 $(d\vec{x}/d\lambda)|_{\lambda_C-}$

$$\left. \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|_{\lambda_C+} = \begin{pmatrix} \dot{x}(\lambda_C +) \\ \dot{y}(\lambda_C +) \\ \dot{z}(\lambda_C +) \end{pmatrix}, \quad \left. \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|_{\lambda_C-} = \begin{pmatrix} \dot{x}(\lambda_C +) \\ \dot{y}(\lambda_C +) \\ -\dot{z}(\lambda_C +) \end{pmatrix}$$

这两根向量与法线方向 $\vec{e}_z$ 三者的混合积是

$$\left. \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|_{\lambda_C+} \cdot \left(\left. \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|_{\lambda_C-} \times \vec{e}_z \right) = \det \begin{pmatrix} \dot{x}(\lambda_C +) & \dot{x}(\lambda_C +) & 0 \\ \dot{y}(\lambda_C +) & \dot{y}(\lambda_C +) & 0 \\ \dot{z}(\lambda_C +) & -\dot{z}(\lambda_C +) & 1 \end{pmatrix} = 0$$

这表明出射光线在入射平面内。

2. 光线方程

考虑光线在各向同性非均匀介质传播，光程

$$l_{AB}[\vec{x}] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s=s_A}^{s=s_B} n(\vec{x}) ds = \int_{\lambda=\lambda_A}^{\lambda=\lambda_B} n(\vec{x}) |\dot{\vec{x}}| d\lambda$$

拉氏函数为

$$L(\lambda, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = n(\vec{x}) |\dot{\vec{x}}|$$

横截条件是

$$\left(L - \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_A, \lambda_B} = 0$$

由于拉氏函数是一次齐次函数，利用齐次函数的欧拉定理，横截条件是恒等式，自动成立。

欧拉方程为

$$|\dot{\vec{x}}| \nabla n - \frac{d}{d\lambda} \left(n \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \right) = \vec{0}$$

λ 是形式参数，不是几何量或物理量，只有拓扑意义，光线方程不可能定解。

需补充参数 λ 的定义，表达式 $\vec{x}(\lambda)$ 才有确定的形式。

可以令 λ 为弧长参数，

$$\lambda = s, \quad (ds)^2 = (d\vec{x})^2$$

满足约束

$$\dot{\vec{x}}^2 = 1$$

代入欧拉方程，得光线方程

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \nabla n$$

容易检验

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} \cdot \left\{ \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) - \nabla n \right\} &= \dot{\vec{x}} \cdot \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \nabla n \right) \frac{d\vec{x}}{ds} + n \dot{\vec{x}} \cdot \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} - \dot{\vec{x}} \cdot \nabla n \\ &= \nabla n \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} + n \cdot 0 - \dot{\vec{x}} \cdot \nabla n \equiv 0 \end{aligned}$$

也就是说 3 个光线方程线性相关；可以取其中 2 个方程，与约束方程联立求解 $\vec{x}(s)$ 。

六、 莫培督原理

1. 哈密顿形式的莫培督原理

在 1744 年，法国数学家莫培督（Pierre-Louis Moreau de Maupertuis）就提出了“**最小作用量原理**”（又称为**莫培督原理**），远远早于哈密顿的变分原理。不过莫培督原理只适用于质点组力学，且原始证明的表述不是很清晰。后来哈密顿将这一原理推广到一般的拉格朗日系统。

考虑不含时的拉格朗日系统（称为**自治系统** autonomous system），其拉氏函数为

$$L = L(q, \dot{q})$$

利用广义能量与拉氏量的关系，作用量的全变分可以写成两种形式，

$$\begin{aligned} \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \Delta \int_{t_1}^{t_2} (p_\alpha \dot{q}_\alpha - H) dt \\ (-H \Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt &= \Delta \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \dot{q}_\alpha dt - (H \Delta t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta H dt \end{aligned}$$

得恒等式

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \dot{q}_\alpha dt = (p_\alpha \Delta q_\alpha) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta H dt$$

自治系统的广义能量守恒，可以只考虑 $\{q_\alpha(t)\}$ 的等能路径，即满足

$$H(q, \dot{q}) = E$$

的路径（不需要满足运动方程），其变分满足

$$\delta H(q, \dot{q}) = 0$$

再补充要求边界处满足条件

$$\Delta q_\alpha|_{t=t_1, t_2} = 0$$

则在莫培督等能变分下有恒等式

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \dot{q}_\alpha dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt$$

由于真实运动必须满足拉氏方程，我们得到了哈密顿形式的莫培督原理：

在连接始末两点 A、B 的所有等能路径中，真实路径是约化作用量取极值的路径，

$$\Delta W[q] = \Delta \int_A^B p_\alpha dq_\alpha = 0$$

式中的泛函 $W[q]$ 称为约化作用量（abbreviated action, reduced action）； Δ 是等能变分。

在这一原理的表达式中，没有时间参数 t ，因此很适合用来求系统的轨道。

2. 莫培督原理的原形式

在哈密顿形式的莫培督原理的基础上，可以简洁地证明莫培督原理的原形式。

下面只考虑稳定约束的牛顿力学系统，质点组的拉氏函数是

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

系统中的质点坐标 $\vec{r}_i$ 满足

$$\frac{\partial \vec{x}_i(t, q)}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

这时动能只含有广义速度的二次项（不适用于相对论力学），

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

约化作用量可以写成

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p_\alpha \dot{q}_\alpha dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha dt = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt$$

莫培督原理为：真实路径满足

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0, \quad \Delta H = 0, \quad \Delta q_\alpha|_{t=t_1, t_2} = 0$$

3. 雅可比形式的莫培督原理

在经典力学的发展史上，曾有很多种变分原理被提出。雅可比形式的莫培督原理把力学与几何联系在一起，是比较重要的一种。

自治力学系统的机械能守恒，

$$H(q, \dot{q}) = T + V = E$$

从莫培督原理的原形式出发，可尝试定义黎曼空间的弧长，

$$2T dt = ds$$

取平方得

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (2T dt)^2 = 2T \cdot 2T (dt)^2 = 2(E - V(q)) \frac{1}{2} M_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta (dt)^2 \\ &= 2(E - V(q)) M_{\alpha\beta}(q) dq^\alpha dq^\beta \end{aligned}$$

只要定义度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 为

$$g_{\alpha\beta}(q) \stackrel{\text{def}}{=} 2[E - V(q)]M_{\alpha\beta}(q)$$

我们就得到了一个黎曼空间。

莫培督原理可以表述为

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} ds = \Delta(s_2 - s_1) = 0$$

即系统的真实轨迹，是黎曼空间的测地线。

哈密顿形式的莫培督原理和雅可比形式的莫培督原理，不显含时间，都适合用来求轨道公式。不过两者的适用范围不同：前者仅要求拉格朗日系统的拉氏函数不含时；后者只适用于拉氏函数不含时、并且动能是广义速度齐次二次函数的牛顿力学系统。

4. 等效拉氏量

记自治系统在黎曼空间的轨迹为

$$q = q(\lambda)$$

其中 λ 是形式参数。约化作用量是

$$W[q] = \int_A^B \sqrt{g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta} d\lambda$$

对应的拉氏函数为

$$L(q, \dot{q}) = \sqrt{g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}$$

可求出 Hess 矩阵，

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}} = \frac{g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}} = \frac{\dot{q}_\alpha}{\sqrt{\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} &= \frac{1}{\sqrt{\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu}} g_{\alpha\beta} - \frac{1}{(\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu)^{3/2}} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \frac{1}{(\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu)^{3/2}} \{(\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu) g_{\alpha\beta} - \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta\} \end{aligned}$$

由于

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right) \dot{q}^\beta = \frac{1}{(\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu)^{3/2}} \{(\dot{q}_\mu \dot{q}^\mu) \dot{q}_\alpha - \dot{q}_\alpha (\dot{q}_\beta \dot{q}^\beta)\} = 0$$

Hess 矩阵的各列线性相关，行列式为零，这是一个**奇异拉格朗日系统**。

奇异系统具有拉格朗日意义上的约束。事实上，这一约束源于系统具有内部对称性——参数不变性，这会使我们得到的拉格朗日方程组不独立。

奇异性的另一影响，是在我们试图从拉格朗日力学过渡到哈密顿力学框架时，无法进行勒让德变换。在 Yang-Mills 规范场中我们会遇到同类的问题，连续的内部对称，即规范不变性，使之成为奇异拉格朗日系统，需要作规范固定才能成功地进行正则量子化。

由于边界处的坐标 q_α 值不变（固定边值），若约定边界处的形式参数为定值 λ_A, λ_B （固定边界），则约化作用量的等能全变分成为简单变分，

$$\begin{aligned} \Delta W &\equiv \delta \int_A^B \sqrt{g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta} d\lambda \\ &= \int_A^B \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}(q) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu}} \delta \{g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\} d\lambda \end{aligned}$$

变分符号前的因子，可以利用参数的定义来简化。

取弧长参数 $d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} ds$, 则

$$g_{\mu\nu}(q)\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu = 1$$

$$\Delta W = \delta \int_A^B \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta ds$$

因此有非奇异的等效拉氏量

$$L_{\text{eff}}\left(q, \frac{dq}{ds}\right) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$$

对应的广义能量积分

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$$

是守恒量,

$$\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = E \implies g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = 2E(ds)^2 \implies E = \frac{1}{2}$$

这一等效拉氏函数在光学、力学和广义相对论有应用。

例 21 几何光学的拉氏函数是

$$L(\lambda, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = n(\vec{x})|\dot{\vec{x}}| = \sqrt{n^2 \delta_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j}$$

相当于莫培督原理中黎曼度规是 $n^2 \delta_{ij}$, 这个奇异系统的等效拉氏函数是

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} n^2 \dot{\vec{x}}^2$$

广义能量积分守恒,

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} n^2 \dot{\vec{x}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \implies n|\dot{\vec{x}}| = 1 \implies d\lambda = n ds$$

相当于约定所取的参数 λ 是光程。

5. 测地线方程

根据等效拉氏函数可以写出运动方程,

$$\frac{d}{ds} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dq^\nu}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\nu}{ds}$$

即

$$g_{\alpha\nu} \frac{d^2 q^\nu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\gamma} \frac{dq^\nu}{ds} \frac{dq^\gamma}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\nu}{ds} = 0$$

整理指标,

$$\frac{d^2 q^\sigma}{ds^2} + g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\gamma} \frac{dq^\nu}{ds} \frac{dq^\gamma}{ds} - \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\nu}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 q^\sigma}{ds^2} + \left(g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \right) \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\nu}{ds} = 0$$

上式第二项是切矢量的二次型, 其系数应该对指标 $\mu \leftrightarrow \nu$ 交换对称, 系数的反对称部分没有贡献。

利用克里斯托弗 (Christoffel) 联络的定义

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \right)$$

可以把测地线方程 (geodesic equation) 写成

$$\frac{d^2 q^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dq^\mu}{ds} \frac{dq^\nu}{ds} = 0$$

例 22 求粒子在有心力场中的轨迹。

取平面极坐标，得动能表达式

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

惯性矩阵是

$$(M_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix}$$

设广义能量为

$$H = T + V(r) = E$$

黎曼空间的弧长平方是

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}dq^\alpha dq^\beta = 2m\{E - V(r)\}[(dr)^2 + r^2(d\theta)^2]$$

得等效拉氏量

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds} = m\{E - V(r)\}\left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\right]$$

θ 是循环坐标，相应的广义动量守恒，

$$J = 2mr^2\{E - V(r)\}\frac{d\theta}{ds}$$

$$= 2mr^2\{E - V(r)\}\frac{d\theta}{\sqrt{2m\{E - V(r)\}[(dr)^2 + r^2(d\theta)^2]}}$$

$$= \sqrt{2m\{E - V(r)\}}\frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$$

其中 $r' \triangleq dr/d\theta$ 。考虑在近心点处，

$$r' = 0, \quad J = \sqrt{2m\{E - V(r)\}}r = mvr$$

这说明守恒量 J 的物理意义是角动量。

由守恒量解出

$$r' = \pm \sqrt{\frac{2m}{J^2}[E - V(r)]r^4 - r^2}$$

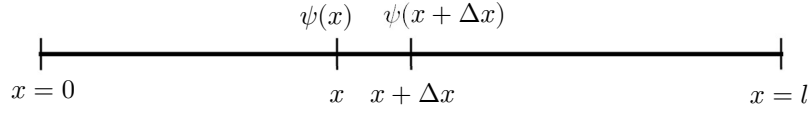
$$d\theta = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2m}{J^2}[E - V(r)]r^4 - r^2}}$$

对上式积分可得轨道公式 $\theta = \theta(r)$ 。

七、连续介质力学

1. 弹性棒的纵向振动

考虑一根弹性棒沿着棒身方向的一维振动。



①运动学分析，建立坐标

用 $\psi = \psi(x, t)$ 表示自然状态下棒子上的 x 点，在 t 时刻的偏移。 x 点的坐标为 $\psi(x, t) + x$ （这是连续体的 Lagrange 描述）。

②微元分析，写出拉氏量

设未变形时的线密度 ρA ，单位长度的弹性系数 EA ，其中 E 是杨氏模量， A 是棒的截面积。

长度为 Δx 的微元，质量为 $\rho A \Delta x$ ，弹性系数为 $EA/\Delta x$ ，动能和势能分别为

$$\Delta T = \frac{1}{2} \rho A \Delta x \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2, \quad \Delta V = \frac{1}{2} \frac{EA}{\Delta x} (\psi(x + \Delta x, t) - \psi(x, t))^2 = \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \Delta x$$

记动能密度、势能密度和拉格朗日密度（Lagrangian density）分别为

$$\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2, \quad \mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$$

$$\mathcal{L} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$$

那么拉氏量是

$$L = \int_0^l \mathcal{L} dx$$

③用哈密顿原理求运动方程

$$S[\psi] = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \mathcal{L} dt dx$$

$$\delta S = \iint dt dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} \delta (\partial_t \psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi)} \delta (\partial_x \psi) \right\}$$

$$= \left(\int_0^l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} \delta \psi dx \right) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi)} \delta \psi dt \right) \Big|_{x=0}^{x=l}$$

$$+ \iint dt dx \delta \psi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} - \frac{\bar{\partial}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi)} \right\}$$

上式中省写了积分区间 $(t_1, t_2) \times (0, l)$ ，其中的符号

$$\partial_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}$$

是偏导数的简写，而“全偏导”则定义为

$$\bar{\partial}_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_t + (\partial_t \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} + (\partial_t^2 \psi) \frac{\partial}{\partial (\partial_t \psi)} + (\partial_t \partial_x \psi) \frac{\partial}{\partial (\partial_x \psi)}$$

$$\bar{\partial}_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{\partial}}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x + (\partial_x \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} + (\partial_x \partial_t \psi) \frac{\partial}{\partial (\partial_t \psi)} + (\partial_x^2 \psi) \frac{\partial}{\partial (\partial_x \psi)}$$

广义坐标在始末时间处的哈密顿变分为零，

$$\delta \psi|_{t=t_0, t_1} = 0, \quad \forall x \in [0, l]$$

于是

$$\delta S = \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi)} \delta \psi dt \right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \iint dt dx \delta \psi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} - \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi)} \right\} = 0$$

得拉格朗日方程

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0 \\ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned}$$

如果棒端未固定，自然边界条件必须成立，

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi)} \right) \right) \Big|_{x=0, l} &= 0 \\ \Rightarrow \left(EA \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad \left(EA \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0 \end{aligned}$$

其物理意义是棒子的端点不受力。

④色散关系

这是一个波动方程，把平面波解

$$\psi(x, t) = \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

代入方程，得色散关系

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 + E k^2 &= 0, \\ \omega(k) &= \sqrt{E/\rho} |k| \end{aligned}$$

波的相速度（phase velocity）和群速度（group velocity）分别为

$$v_p = \left| \frac{\omega}{k} \right| = \sqrt{E/\rho}, \quad v_g = \left| \frac{d\omega}{dk} \right| = \sqrt{E/\rho}$$

两者相等，且与频率无关，即无色散。

⑤求方程的通解（方法 1——行波法，by d'Alembert）

作变量代换，令

$$v_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{E/\rho}, \quad a \stackrel{\text{def}}{=} x + v_0 t, \quad b \stackrel{\text{def}}{=} x - v_0 t$$

那么

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(a, b), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = v_0 \frac{\partial \psi}{\partial a} - v_0 \frac{\partial \psi}{\partial b}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \\ \mathcal{L} dt dx &= \left\{ \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right\} dt dx \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \rho A \left(v_0 \frac{\partial \psi}{\partial a} - v_0 \frac{\partial \psi}{\partial b} \right)^2 - \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \right)^2 \right\} \frac{1}{2v_0} da db \\ &= -\frac{EA}{v_0} \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial b} da db \end{aligned}$$

运动方程成为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial b} = 0$$

积分两次，得达朗贝尔公式：

$$\psi = \xi(a) + \eta(b) = \xi(x + v_0 t) + \eta(x - v_0 t)$$

这里的 ξ, η 是任意单变量可导函数。上式两项分别是速度为 $\pm v_0$ 的机械波——行波，这种求解波动方程的方法又称为行波法。

⑥求方程的通解（方法2——分离变量法）

设棒端固定，满足**固定边值**条件

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0$$

我们先来求分离变量解，

$$\psi(x, t) = q(t)u(x)$$

$$\psi(0, t) = \psi(l, t) = 0 \Rightarrow u(0) = u(l) = 0$$

代入波动方程得

$$\begin{cases} \rho \frac{\ddot{q}}{q} = E \frac{u''}{u} = c \\ \ddot{q} = \frac{c}{\rho} q \\ u''(x) = \frac{c}{E} u(x) \end{cases}$$

后一个微分方程

$$u''(x) = \frac{c}{E} u(x)$$

存在满足固定边界条件

$$u(0) = u(l) = 0$$

的解。固定边界条件会要求 c 只能取特定的值（称之为微分方程的特征值），

$$c_n = -\frac{E\pi^2}{l^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

与特征值 c_n 对应的特征函数（驻波）是

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n \frac{\pi x}{l}\right)$$

根据谱分解定理，由于算子

$$\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$$

是厄米算符，这些特征函数构成满足边界条件的平方可积函数 $L^2[0, l]$ 的正交归一的完备基，

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l f^*(x)g(x)dx$$

$$(u_m, u_n) = \delta_{m,n}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

于是，在任意时刻弹性棒的形状可以展开为

$$\psi(x, t) \equiv q_1(t)u_1(x) + q_2(t)u_2(x) + \dots$$

求得偏导数

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{q}_1 u_1 + \dot{q}_2 u_2 + \dots$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = q_1 u'_1 + q_2 u'_2 + \dots$$

打撇的符号表示要对 x 求导。

代回作用量泛函，

$$S[q] = \int_{t=t_1}^{t_2} \int_{x=0}^l \left\{ \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right\} dt dx$$

$$= \int_{t=t_1}^{t_2} \int_{x=0}^l \left\{ \frac{1}{2} \rho A \dot{q}_m u_m \dot{q}_n u_n - \frac{1}{2} E A q_m u'_m q_n u'_n \right\} dt dx$$

然后对 x 积分,

$$\begin{aligned} \int_0^l u_m u_n dx &= \delta_{m,n} \\ \int_0^l u'_m u'_n dx &= - \int_0^l u''_m u_n dx = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l u_m u_n dx = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \delta_{m,n} \\ S[q] &= \int_{t=t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho A \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} E A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \pi^2}{l^2} q_n^2 \right\} dt \end{aligned}$$

现在 $q_n(t)$ 是系统的广义坐标, 拉氏函数是

$$L(t, q, \dot{q}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \rho A \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} E A \frac{n^2 \pi^2}{l^2} q_n^2 \right\}$$

运动方程为

$$\ddot{q}_n + \frac{n^2 \pi^2 E}{l^2 \rho} q_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

解得

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = n\pi \frac{v_0}{l}$$

有无穷多种振动模式: $n=1$ 的模式 q_n 是基频, 其它为倍频。

⑦初值问题

完整的解是

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) u_n(x)$$

为了方便, 我们经常认为把 $q_n(t)$ 加上虚部,

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \xrightarrow{\text{yields}} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) - i A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

$$q_n(t) = C_n \exp(-i\omega_n t), \quad C_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n \exp(-i\varphi)$$

C_n 称为复振幅。

复波函数是

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-i\omega_n t} u_n(x)$$

各模式的振幅和相位由初始条件确定。

如果已知弹性棒的初始位形

$$\text{Re}[\psi(x, t=0)] = \eta(x), \quad x \in [0, l]$$

和初始速度场

$$\text{Re} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right]_{t=0} = \xi(x), \quad x \in [0, l]$$

那么有

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\text{Re } C_n) u_n(x), \quad \xi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\text{Im } C_n) \omega_n u_n(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} C_n = (u_n, \eta) \\ \operatorname{Im} C_n = \frac{1}{\omega_n} (u_n, \xi) \end{cases}, \quad C_n = (u_n, \eta) + \frac{i}{\omega_n} (u_n, \xi)$$

$$\psi(x, t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(u_n, \eta) + \frac{i}{\omega_n} (u_n, \xi) \right] e^{-i\omega_n \cdot 0} u_n(x)$$

任意时刻的偏移是

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(u_n, \eta) + \frac{i}{\omega_n} (u_n, \xi) \right] e^{-i\omega_n t} u_n(x)$$

端点不固定的情形可作为练习，请读者自行分析。

2. 空气中的声波

一根截面积为 S 的玻璃管，内有空气，静态时空气密度为 ρ ，压强为 p_0 。不考虑输运，且空气分子来不及达到热平衡，近似为绝热过程。

设原来在 x 处的一小段气体体积元，偏移了 $\psi(x, t)$ 。

气体的绝热过程满足

$$PV^\gamma = c, \quad \gamma \approx 1.4$$

在膨胀过程中，气体做的功是

$$\int P dV = \int c V^{-\gamma} dV = \frac{c}{1-\gamma} V^{1-\gamma}$$

于是气体的内能应该是

$$-\frac{c}{1-\gamma} V^{1-\gamma}$$

设体积元未膨胀时的压强是 p_0 ，那么

$$c = PV^\gamma = p_0 (S\Delta x)^\gamma$$

在 t 时刻，体积元有变形，变形前后内能的差是

$$\begin{aligned} E(V + \Delta V) &= -\frac{p_0 (S\Delta x)^\gamma}{1-\gamma} (V + \Delta V)^{1-\gamma} \\ &= -\frac{p_0 (S\Delta x)^\gamma}{1-\gamma} S^{1-\gamma} \{ [x + \Delta x + \psi(x + \Delta x, t)] - [x + \psi(x, t)] \}^{1-\gamma} \\ &= -\frac{p_0 S (\Delta x)^\gamma}{1-\gamma} \left(\Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta x \right)^{1-\gamma} = -\frac{p_0 S}{1-\gamma} \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^{1-\gamma} \Delta x \end{aligned}$$

对小量 $\partial\psi/\partial x$ 作泰勒展开，

$$\Delta E = E(V + \Delta V) - E(V) \approx -\frac{p_0 S}{1-\gamma} \left\{ 1 + (1-\gamma) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{(1-\gamma)(1-\gamma-1)}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right\} \Delta x$$

上式的一阶偏导数项，可以通过重新定义场

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi + kx$$

消除；常数项可舍弃，

$$\Delta E = \frac{1}{2} p_0 S \gamma \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right)^2 \Delta x$$

所以拉格朗日密度是（省略“ $\sim$ ”符号）

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho S \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} p_0 S \gamma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2$$

得运动方程

$$\rho S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - p_0 S \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

从运动方程可得色散关系是

$$-\rho S \omega^2 + p_0 S \gamma k^2 = 0$$

因此声波的相速度、群速度为

$$v_p = |\omega/k| = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho}}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{p_0 \gamma}{\rho}}$$

3. 连续体系的拉氏方程

三维空间中连续体系的标量场可表示为

$$\psi = \psi(t, x, y, z)$$

场也可以是多个或多分量的（如电磁场、Dirac 场），

$$\psi_i = \psi_i(t, x, y, z) = \psi_i(x^\mu), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

设系统的拉格朗日密度是

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x^\mu, \psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu} \right)$$

由最小作用量原理，拉氏方程是

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} = 0$$

注意上式第一项中 $\frac{\bar{\partial}}{\partial x^\mu}$ 的含义是求全偏导数，

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu} \right)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu} \right) \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu} \right) \partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu} \right) \partial \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^\nu} \right)} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$$

在经典场的运动方程中， (t, x, y, z) 都是参数，地位等同。

例 23 薛定谔场的拉氏密度

$$\mathcal{L} = -i\hbar \frac{1}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* + V \psi \psi^*$$

变分，

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0$$

得薛定谔方程

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(t, \vec{x}) \psi$$