

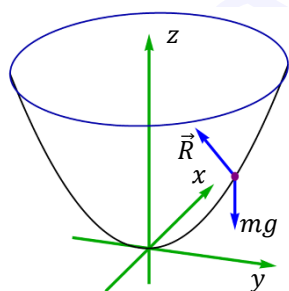
## 第二章 拉格朗日力学

### 一、 约束系统的牛顿方程

考虑被约束在光滑旋转抛物面上的质点，其坐标 $\vec{x} \triangleq (x, y, z)^T$ 满足约束方程

$$f(\vec{x}) = z - (x^2 + y^2) = 0$$

其中 $z$ -轴是垂直向上的方向。



质点受到抛物面的约束力（工程学科称之为约束反力）。约束力 $\vec{R}$ 的方向只能沿着切平面的法向，所以

$$\vec{R} = \lambda(t) \nabla f(\vec{x})$$

其中 $\lambda(t)$ 是待定乘子。

运动方程为

$$m\ddot{\vec{x}} = -mg\vec{e}_z + \lambda(t)\nabla f(\vec{x})$$

写成分量形式

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\lambda x \\ m\ddot{y} = -2\lambda y \\ m\ddot{z} = -mg + \lambda \end{cases}$$

运动方程与约束方程联立，四个微分方程刚好可以求解四个未知量 $\{x(t), y(t), z(t), \lambda(t)\}$ 。

对于约束系统，每增加一个约束条件，就会多出一个待定乘子需要求解——问题反而变得更复杂了。当系统的自由度和约束的个数都很多时，会比较困难。

应用牛顿力学主要有 3 个困难：

- (1) 质点组有很多坐标；
- (2) 为了写出运动方程，需要考虑未定的约束力，且约束越多越复杂；
- (3) 需要作受力分析，写出正确的力和力矩分量。

这些都是在分析力学中需要解决的问题。

## 二、 约束的类型

减少坐标数量的办法，是利用约束条件消去不独立的坐标参数。

力学系统的约束条件多种多样，可用来限制系统在曲面、曲线上运动，限制系统的体积不变，或者满足其它运动学要求。

约束条件可能表达为代数方程、不等式，也可能是微分方程或泛函。

我们把方程不显含时间的约束，称为**稳定约束**或**定常约束**（scleronomic constraints），显含时间的约束称为**不稳定约束**或**非定常约束**（rheonomic constraints）。

按照约束方程是否依赖于速度来分类，把不显含速度的约束称为**几何约束**，显含速度的约束称为**微分约束**。

另一种分类的方式是看约束是否能够解除，定义为**可解约束**(单面约束, 用不等式表示)和**不可解约束**(双面约束, 用等式表示)。例如，一个质点在物体表面上运动、但能够脱离表面，那么所满足的约束条件是可解约束。

几何约束，或者可积的微分约束，给出的是坐标之间的代数关系，能够消去一些坐标参数，统称为**完整约束**（holonomic constraints）。不可积微分约束则称为**非完整约束**。

能够确定体系位形（对于力学问题，即质点组中全部质点的坐标）的独立变量

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$$

称为系统的**广义坐标**，各个质点的坐标是广义坐标和时间的函数，

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

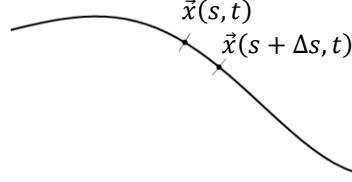
为了完全确定体系位形，所需采用的最少广义坐标数目，定义为系统的**位形自由度**。

每一个完整约束，可以减少一个位形自由度。

**例** 长度为 $l$ 的无弹性绳子，写出绳子满足的约束方程。

在伸直状态下，绳子上到起始端的距离为  $s \in [0, l]$  的点，在  $t$  时刻的坐标记为  $\vec{x}(s, t)$ 。

时空的函数称为场。绳子的位形  $\vec{x}(s, t)$  是内部空间坐标  $s$  以及时间  $t$  的函数，是一个三分量的场。



绳子无弹性这一约束条件，即在任何时刻  $t$ ，绳子上任意一小段微元的长度保持不变，

$$|\vec{x}(s + \Delta s, t) - \vec{x}(s, t)|^2 = (\Delta s)^2$$

约束方程为

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1$$

这是定常约束、几何约束、双面约束、完整约束。

### 三、微分约束的可积性

微分约束方程（组），是能否通过积分转化为几何约束，是可积性问题。

考虑一个微分约束

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} A dx + B dy + C dz = 0$$

这里  $\omega$  是法夫（Pfaff）形式（即微分 1-形式，可参考本章附录中的定义）。如果  $\omega$  存在原函数  $f(\vec{x})$ ，

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

那么法夫形式的外微分是

$$d\omega = d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0$$

实际上  $d\omega = 0$  是法夫形式  $\omega$  存在原函数（即**强可积**）的充要条件（附录 3 庞加莱引理）。

还存在另一种可能，法夫形式  $\omega$  本身不存在原函数，不过在乘以合适的（非零）**积分因子**  $\varphi(\vec{x})$  之后，

$$\omega' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\vec{x}) \omega$$

微分形式 $\omega'$ 存在原函数，满足

$$d(\varphi\omega) = 0$$

这种情况称微分形式 $\omega$ **弱可积**。

强可积则必然弱可积。两种情况合在一起，都称为**可积**，判别的方法可以表述为弗罗本尼斯（Frobenius）定理。

**定理 1** 法夫形式

$$\omega = A_i(x)dx_i$$

可积的等价条件是

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

在分析力学或常微分方程问题中，有时需要判定多个法夫形式是否可积。

例如，法夫形式 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 各自都是不可积的，但是利用积分因子线性组合之后，

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

会满足

$$d\omega'_1 = 0, \quad d\omega'_2 = 0$$

即法夫形式 $\omega'_1$ 和 $\omega'_2$ 存在原函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 。这样微分方程组

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = 0 \end{cases}$$

的解是

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0$$

这时我们称 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 是**完全可积组**，微分方程组**完全可积**。

对于一组多个法夫形式，弗罗本尼斯定理提供了判定完全可积性的方法。

**定理 2** 如果一组法夫形式 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ 线性无关，即满足

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k \neq 0$$

则这组法夫形式完全可积的充要条件是<sup>1</sup>

$$\Omega \wedge d\omega_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

**例** 三维空间中的法夫形式

$$\omega = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

这个法夫形式的外微分是

$$d\omega = d(F_i dx_i) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

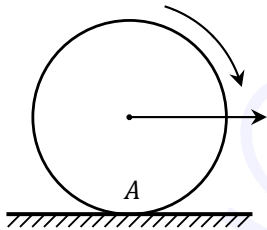
可积的条件是

$$\begin{aligned} \omega \wedge d\omega &= F_k dx_k \wedge \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = F_i \frac{\partial F_k}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = F_i \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \varepsilon_{ijk} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{F}) dx \wedge dy \wedge dz = 0 \end{aligned}$$

也就是要求

$$\vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

**例** 轮子在直线上作纯滚动，轮子上与地面接触的点为A，那么A点的位移为零，即满足微分约束方程



$$dx_A = dx - a d\varphi = 0$$

$$\dot{x} - a\dot{\varphi} = 0$$

这是可积约束，

$$\omega = dx - a d\varphi, \quad d\omega = 0$$

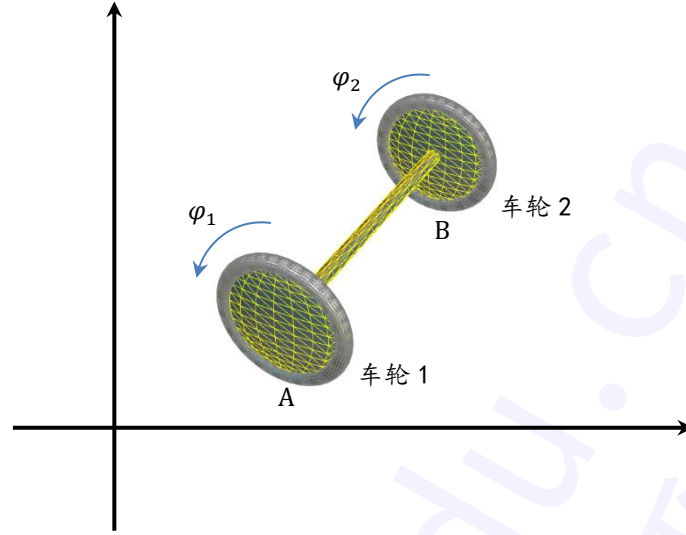
积分后得

$$x = a\varphi + x_0$$

利用这个几何约束可以消去一个广义坐标。

**例** 两个半径为a的轮子，使用轴承安装在长度为l的车轴两端。整个系统在水平面上作无滑动滚动。写出约束方程并判断是否可积。

<sup>1</sup> 陈省身、陈维恒，《微分几何讲义》第229页；C.V. 威斯頓霍尔兹，《数学物理中的微分形式》，北京大学出版社，1990年；外微分的计算，可以参考龚升编写的《简明微积分》第七章。



解：①在地面建立笛卡尔坐标系，设车轴中点的水平坐标分量为 $(x, y)$ ；车轴方向（从车轮 1 指向车轮 2）与 $x$ -轴夹角为 $\theta$ ；沿着车轴方向看，取车轮逆时针旋转方向为正，两个轮子的转角分别为 $\varphi_1, \varphi_2$ 。总计有 5 个广义坐标。

轮子与地面的接触点A,B的坐标为

$$(x, y) \mp \frac{l}{2} (\cos \theta, \sin \theta)$$

故轮子上触地点的牵连位移为

$$(\Delta x, \Delta y) \mp \frac{l}{2} \Delta \theta (-\sin \theta, \cos \theta)$$

转动对触地点贡献的相对位移是

$$a \Delta \varphi_i \left( \cos \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) = a \Delta \varphi_i (\sin \theta, -\cos \theta), \quad i = 1, 2.$$

触地点的总位移为

$$(\Delta x, \Delta y) \mp \frac{l}{2} \Delta \theta (-\sin \theta, \cos \theta) + a \Delta \varphi_i (\sin \theta, -\cos \theta)$$

纯滚动即两个接触点的位移均为零，即满足差分约束方程

$$\begin{cases} (\Delta x, \Delta y) - \frac{l}{2} \Delta \theta (-\sin \theta, \cos \theta) + a \Delta \varphi_1 (\sin \theta, -\cos \theta) = 0 \\ (\Delta x, \Delta y) + \frac{l}{2} \Delta \theta (-\sin \theta, \cos \theta) + a \Delta \varphi_2 (\sin \theta, -\cos \theta) = 0 \end{cases}$$

共有四个线性方程。

现在以 $\{dx, dy, d\theta, d\varphi_1, d\varphi_2\}$ 代表在 $dt$ 时间内系统的真实运动，把差分 $\Delta$ 替换成微分 $d$ ，得法夫形式的约束方程，

$$\begin{cases} \omega_1 = dx + \frac{l}{2} \sin \theta d\theta + a \sin \theta d\varphi_1 = 0 \\ \omega_2 = dy - \frac{l}{2} \cos \theta d\theta - a \cos \theta d\varphi_1 = 0 \\ \omega_3 = dx - \frac{l}{2} \sin \theta d\theta + a \sin \theta d\varphi_2 = 0 \\ \omega_4 = dy + \frac{l}{2} \cos \theta d\theta - a \cos \theta d\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

四个方程两边同除以 $dt$ ，可得微分约束方程

$$\begin{cases} \dot{x} + \frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta} + a \sin \theta \dot{\varphi}_1 = 0 \\ \dot{y} - \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta} - a \cos \theta \dot{\varphi}_1 = 0 \\ \dot{x} - \frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta} + a \sin \theta \dot{\varphi}_2 = 0 \\ \dot{y} + \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta} - a \cos \theta \dot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

计算发现

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = 0$$

这说明四个法夫方程线性相关。把 $\{dx, dy, d\theta, d\varphi_1, d\varphi_2\}$ 看成变量，用高斯消元法也可以发现只有3个微分方程独立。

选用前三个方程。为了检查三个约束方程的可积性，令

$$\begin{aligned} \Omega &\stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \\ &= -l \sin \theta dx \wedge dy \wedge d\theta - a \sin \theta dx \wedge dy \wedge d\varphi_1 + a \sin \theta dx \wedge dy \wedge d\varphi_2 - \frac{la}{2} \cos \theta \sin \theta dx \wedge d\theta \\ &\quad \wedge d\varphi_1 - \frac{la}{2} \cos \theta \sin \theta dx \wedge d\theta \wedge d\varphi_2 - a^2 \cos \theta \sin \theta dx \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \\ &\quad - \frac{la}{2} \sin^2 \theta dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_1 - \frac{la}{2} \sin^2 \theta dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_2 - a^2 \sin^2 \theta dy \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \end{aligned}$$

计算法夫形式的外微分，

$$\begin{cases} d\omega_1 = a \cos \theta d\theta \wedge d\varphi_1 \\ d\omega_2 = a \sin \theta d\theta \wedge d\varphi_1 \\ d\omega_3 = a \cos \theta d\theta \wedge d\varphi_2 \end{cases}$$

然后计算外积，

$$\Omega \wedge d\omega_1 = a^2 \sin \theta \cos \theta dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

$$\Omega \wedge d\omega_2 = a^2 \sin^2 \theta dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

$$\Omega \wedge d\omega_3 = a^2 \sin \theta \cos \theta dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

有非零项，根据 Frobenius 定理，这不是完全可积组。

②消去可积的自由度

三个独立的法夫方程，是部分可积的。

定义参数

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \phi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

分别表示前滚角和转向角。这样三个约束条件可以化简成

$$\begin{cases} dx + a \sin \theta d\varphi = 0 \\ dy - a \cos \theta d\varphi = 0 \\ d\theta + \frac{a}{l} d\phi = 0 \end{cases}$$

上式中的最后一个方程可积，积分得

$$\phi = -\frac{a}{l}\theta + \phi_0$$

以此消去不独立广义坐标 $\phi$ ，系统只需要四个独立广义坐标描述。

独立广义坐标 $\{x, y, \theta, \varphi\}$ 满足法夫形式的约束方程

$$\begin{cases} \omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} dx + a \sin \theta d\varphi = 0 \\ \omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} dy - a \cos \theta d\varphi = 0 \end{cases}$$

现在计算它们的外积，

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \wedge \omega_2 = dx \wedge dy - a \cos \theta dx \wedge d\varphi - a \sin \theta dy \wedge d\varphi$$

和外微分

$$\begin{cases} d\omega_1 = a \cos \theta d\theta \wedge d\varphi \\ d\omega_2 = a \sin \theta d\theta \wedge d\varphi \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} \Omega \wedge d\omega_1 = a \cos \theta dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi \\ \Omega \wedge d\omega_2 = a \sin \theta dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi \end{cases}$$

按弗罗本尼斯定理，这不是完全可积组。

实际上这两个剩余的微分约束，也不是部分可积的。

至此我们发现，为了描述双轮车的运动，必须使用四个广义坐标，系统的位形自由度是 4。虽然这四个广义坐标 $\{x, y, \theta, \varphi\}$ 仍然要满足两个的约束条件，但是却不能有这两个约束方程消去广义坐标，——因为约束方程不可积。

### ③定位跟踪

如果我们只检测两轮车本身的运动，而不关心轮子转过多少圈，可在约束方程中消去 $d\varphi$ ，得

$$\cos \theta dx + \sin \theta dy = 0$$

两边除以 $dt$

$$\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} = 0$$

除非发生了侧向滑动，两轮车的运动必须满足上面的微分方程。

## 四、 达朗贝尔原理

我们把牛顿方程中的主动力和约束力分开表示，那么 $N$ 个质点构成的质点组满足的运动方程是

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m\ddot{\vec{x}}_i = \vec{0}, \quad i = 1, \dots, N$$

其中 $\vec{F}_i$ 是第 $i$ 个质点所受的主动力， $\vec{R}_i$ 是约束反力。

在几何约束下，约束反力始终与约束面垂直。为了消除约束反力，可以用约束面的切矢量与方程两边做内积，为此引入虚位移的概念。

### 1. 虚位移

质点组在 $t$ 时刻瞬时发生的，且符合约束条件（但无需满足运动方程）的无限小位移 $\delta\vec{x}_i(t)$ ，称为虚位移（virtual displacement）。或者等价地表述成：虚位移是两个可能位移之无限小差，即数学中的变分（后面章节详细讨论）。

**可能位移**：满足约束条件的位移 $\vec{x}_i(t)$ （无需满足运动方程）。

**真实位移**：同时满足约束条件和运动方程的位移。

用广义坐标表示的虚位移为

$$\delta\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q + \delta q) - \vec{x}_i(t, q) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

位移 $\vec{x}_i(t, q + \delta q)$ 和 $\vec{x}_i(t, q)$ 满足约束条件，两者之差是虚位移。

**例** 蚂蚁爬行在膨胀的气球上，虚位移 $\delta\vec{x}$ 在球面的切平面内；实际位移 $d\vec{x}$ 既有切向分量，也有法向分量。

例 穿在运动圆环上的珠子，珠子的虚位移 $\delta\vec{x}$ 沿圆环当前的切向；

真实位移 $d\vec{x} = \text{切向分量} + \text{牵连分量}\vec{v}dt$

力学系统的独立虚位移数目，称为该系统的**动力学自由度**或**变分自由度**（这也是独立运动方程的个数）。

## 2. 理想约束

力 $\vec{F}$ 在虚位移下所作的功

$$\delta W \triangleq \vec{F} \cdot \delta\vec{x}$$

称为**虚功**（virtual displacement）。

如果约束力的虚功之和恒为零，

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta\vec{x}_i = 0$$

则称相应的约束为**理想约束**（ideal constraints）。此时只有主动力 $\vec{F}_i$ 对虚功有贡献，

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i$$

理想约束很常见。杆、刚体、光滑面、无滑滚动、铰链和绳子的约束都是理想约束

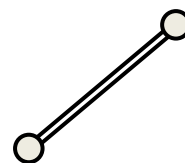
例 铰链用于自行车的链条、门轴和窗户等，其两部分的接触点重合，位移相同；根据牛顿第三定律，约束力和约束反力之和为零，故虚功为零，是理想约束。



铰链



球铰支座



刚性杆的约束

例 用无质量的刚性杆连接质点A和质点B，两个质点的距离不变，

$$(\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2 = l^2 \Rightarrow (\vec{x}_A - \vec{x}_B) \cdot (\delta\vec{x}_A - \delta\vec{x}_B) = 0$$

再利用牛顿第三定律的强形式，

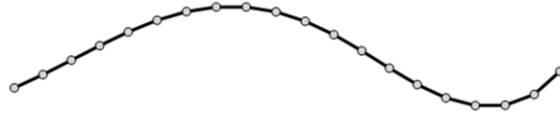
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} = c(\vec{x}_A - \vec{x}_B)$$

得约束力的虚功之和是

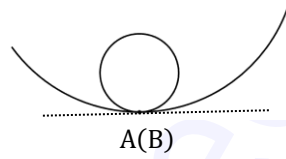
$$\delta W = \vec{F}_{BA} \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{F}_{AB} \cdot \delta\vec{x}_B = -c(\vec{x}_A - \vec{x}_B) \cdot (\delta\vec{x}_A - \delta\vec{x}_B) = 0$$

是理想约束。

**例** 无弹性的绳子可看成由无穷多个短刚性杆通过铰接而成，因此是理想约束。



**例** 在“光滑”的刚性表面的接触点处，作用力垂直于切面法线方向 $\vec{n}$ 。



记物体上的接触点为A，表面上的接触点为B。此点处两个刚性表面有公共的切平面，记法向量为 $\vec{n}$ 。两个表面滑动时，两点A、B之间有切向的相对运动，但是无法向的相对运动。

$$(\delta \vec{x}_A - \delta \vec{x}_B) \cdot \vec{n} = 0$$

所以有

$$\delta \vec{x}_A \equiv \epsilon \vec{n} + \epsilon \vec{m}_A, \quad \delta \vec{x}_B \equiv \epsilon \vec{n} + \epsilon \vec{m}_B$$

上式中 $\vec{m}_A$ 和 $\vec{m}_B$ 是切平面内的矢量，

$$\vec{n} \cdot \vec{m}_A = \vec{n} \cdot \vec{m}_B = 0$$

由牛顿第三定律，A对B的作用力 $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ 与B对A的作用力 $\vec{F}_{B \rightarrow A}$ 大小相等、方向相反，

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} = F \vec{n}$$

计算约束力的虚功，得

$$\delta W = \vec{F}_{B \rightarrow A} \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{F}_{A \rightarrow B} \cdot \delta \vec{x}_B = F \vec{n} \cdot (\delta \vec{x}_B - \delta \vec{x}_A) = F \vec{n} \cdot (\epsilon \vec{m}_B - \epsilon \vec{m}_A) = 0$$

所以光滑表面的约束是理想约束。

**例** 如果接触点处是粗糙的，两个物体作纯滚动，没有相对滑动，则

$$\delta \vec{x}_A = \delta \vec{x}_B, \quad \vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

$$\delta W = \vec{F}_{B \rightarrow A} \delta \vec{x}_A + \vec{F}_{A \rightarrow B} \delta \vec{x}_B = 0$$

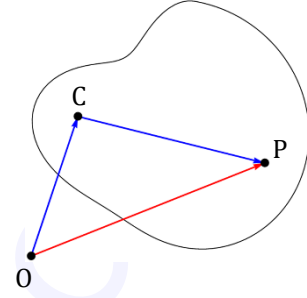
因此纯滚动是理想约束。

**例** 刚体是质点组，内部的各个质点之间的距离都不变。

任一质点P的位移 $\vec{x}_i$ 可分解为参考点C的牵连运动 $\vec{x}_C$ 和相对于与参考点的转动。

如果转动轴沿 $\vec{n}$ 方向，逆时针转无穷小角度 $\delta\varphi$ ，刚体中质点的虚位移是

$$\delta\vec{x}_i = \delta\vec{\varphi} \times (\vec{x}_i - \vec{x}_C) + \delta\vec{x}_C$$



各质点的虚功之和为

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot [\delta\vec{\varphi} \times (\vec{x}_i - \vec{x}_C) + \delta\vec{x}_C] = \left( \sum_{i=1}^N (\vec{x}_i - \vec{x}_C) \times \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{\varphi} + \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{x}_C$$

考虑在惯性系中的孤立刚体。约束力 $\vec{F}_i$ 均为内力，合力矩为零、合力为零，从而内力的虚功为零，刚性约束是理想约束。

### 3. 达朗贝尔原理

#### (1) 理想系统的达朗贝尔原理

在理想约束下，利用虚位移点乘牛顿方程，消去约束力，就得到了达朗贝尔原理：

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \delta\vec{x}_i = 0$$

满足理想约束的系统，称为**理想系统**。分析力学只适用于理想系统。

这个限制不会减小分析力学的适用范围——把哪些力当作约束力，我们是可以选择的。

例如当存在摩擦力时，只能把摩擦力当成主动力处理。在最极端的情形，我们把所有的作用力都当作主动力，于是约束力为零，约束力的虚功为零，当然是理想约束。

#### (2) 广义坐标下的运动方程

把质点组的直角坐标 $\{\vec{x}_i | i = 1, 2, \dots, N\}$ ，表示为广义坐标 $\{q_\alpha | \alpha = 1, 2, \dots, n\}$ 的函数，

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q(t))$$

那么虚位移是

$$\delta\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q(t) + \delta q(t)) - \vec{x}_i(t, q) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

代入达朗贝尔原理，得

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0$$

对于完整系统，如果所取的广义坐标互相独立，则虚位移 $\{\delta q_\alpha | \alpha = 1, 2, \dots, n\}$ 线性无关，

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

**例** 设单摆在垂直平面中运动，利用 d'Alembert 原理推导运动方程。

**解** 建立坐标系：以向下为y轴，水平为x轴。

设绳长为 $l$ ，约束条件是

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

可以取摆线与垂直方向的夹角 $\theta$ 为独立广义坐标，

$$x = l \sin \theta, y = l \cos \theta$$

$$\dot{x} = l \cos \theta \dot{\theta}, \quad a_x = \ddot{x} = l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$\dot{y} = -l \sin \theta \dot{\theta}, \quad a_y = \ddot{y} = -l \sin \theta \ddot{\theta} - l \cos \theta \dot{\theta}^2$$

根据 d'Alembert 原理

$$(mg\vec{e}_y - m\ddot{x}\vec{e}_x - m\ddot{y}\vec{e}_y) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{e}_y \right) \delta \theta = 0,$$

$$-m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + (mg - m\ddot{y}) \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0,$$

$$-ml^2(\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2) \cos \theta - ml(g + l \sin \theta \ddot{\theta} + l \cos \theta \dot{\theta}^2) \sin \theta = 0,$$

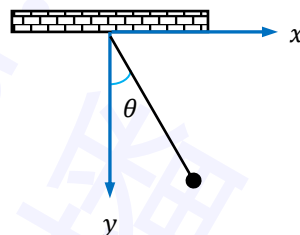
$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

### (3) 不独立广义坐标下的运动方程

如果所取的广义坐标不独立，或者有非完整约束存在，则 $\{\delta q_\alpha | \alpha = 1, 2, \dots, n\}$ 线性相关，

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0, \\ c_{j\alpha} \delta q_\alpha = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

可以利用变分约束方程消去不独立的变分，然后求解运动方程；或者引进拉格朗日乘子 $\{\lambda_j(t) | j = 1, 2, \dots, k\}$ ，得（第一类拉格朗日方程）



$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \lambda_j c_{j\alpha} \delta q_\alpha = 0$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} + \lambda_j c_{j\alpha} = 0.$$

拉格朗日乘子 $\lambda_j(t)$ 有什么物理意义？我们在牛顿方程

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{0}$$

的两边同点乘 $\partial \vec{x}_i / \partial q_\alpha$ ，然后求和，

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = 0$$

把这个等式与第一类拉格朗日方程相减，得

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = \lambda_j c_{j\alpha}$$

定义广义约束反力为

$$R_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha}$$

那么有

$$R_\alpha = \lambda_j c_{j\alpha}$$

上表明，拉氏乘子正比于约束反力的大小。

#### (4) 微分约束方程和变分约束方程的关系

①完整约束：

几何约束和可积微分约束都可以写成

$$f(t, \vec{x}_i) = 0$$

虚位移是瞬时发生的，不需要时间， $\delta t = 0$ ，且满足约束条件

$$f(t, \vec{x}_i + \delta \vec{x}_i) = 0$$

两式相减，

$$f(t, \vec{x}_i + \delta \vec{x}_i) - f(t, \vec{x}_i) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_i} \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

虚位移线性相关。

真实位移 $d\vec{x}_i$ 是在 $dt$ 时间内发生的，满足约束方程

$$f(t + dt, \vec{x}_i + d\vec{x}_i) = 0$$

与原方程相减得

$$f(t + dt, \vec{x}_i + d\vec{x}_i) - f(t, \vec{x}_i) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_i} \cdot d\vec{x}_i = 0$$

②线性非完整约束：

假设从物理模型（如圆环或球的无滑滚动）出发进行运动学分析，得到约束方程是

$$\vec{c}_i(t, q) \cdot \Delta \vec{x}_i + c_0(t, q) \Delta t = 0$$

对任意无穷小 $\Delta \vec{x}_i$ ， $\Delta t$ 都成立（无论是否满足运动方程）。

虚位移的约束关系可以通过取

$$\Delta t = 0, \quad \Delta \vec{x}_i \rightarrow \delta \vec{x}_i$$

得到，满足

$$\vec{c}_i \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

对于真实位移，

$$\Delta t \rightarrow dt, \quad \Delta \vec{x}_i \rightarrow d\vec{x}_i$$

所以

$$\vec{c}_i \cdot d\vec{x}_i + c_0 dt = 0$$

$$\vec{c}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i + c_0 = 0$$

可见对牛顿力学问题中的完整系统或线性非完整系统，**Hölder 规则**成立：把微分约束方程

$$c_\alpha(t, q) \dot{q}_\alpha + c_0(t, q) = 0$$

中的微分符号改为变分 $d \rightarrow \delta$ ，并且令 $\delta t = 0$ ，就能得到变分约束方程

$$c_\alpha \delta q_\alpha = 0$$

非完整约束方程不可积，无法用以消去广义坐标，但是可以消去虚位移。

每一个完整约束，能够同时减少一个位形自由度（或称为运动学自由度）和一个变分自由度（又叫做动力学自由度）；

每一个非完整约束，只能减少一个变分自由度，不能减少位形自由度。

因此，

$$\text{位形自由度} \geq \text{动力学自由度}。$$

③非线性非完整约束（nonlinear nonholonomic constraints）：

牛顿力学中没有实例。

在伺服控制问题中，需分析具体模型。位形的微分约束条件与变分的约束条件之间，没有固定的关系。例如

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}dx + \dot{y}^2dt + bdt = 0 \\ \dot{x}dx + \dot{y}dy + bdt = 0 \\ \frac{1}{2}\dot{x}^2dt + \frac{1}{2}\dot{x}dx + \dot{y}dy + bdt = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}\delta x = 0 \\ \dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y = 0 \\ \frac{1}{2}\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

变分约束方程存在无穷多种可能性。必须直接从问题的原始模型出发，来确定哪一种写法才是正确的变分约束方程。

## 4. 虚功原理

### (1) 虚功原理

对于静力学问题，质点组的各个质点均静止，

$$\ddot{\vec{x}}_i = \vec{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

由达朗贝尔原理，系统平衡的必要条件是主动力的虚功之和为零，

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i = 0$$

### (2) 广义坐标下的平衡方程

把质点组的直角坐标表示为广义坐标的函数，

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

那么虚位移是两个可能位移之差，

$$\delta \vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q + \delta q) - \vec{x}_i(t, q) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

虚功原理成为

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \left( \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0$$

广义坐标 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 独立，从而虚位移 $\{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n\}$ 线性无关，平衡条件是广义力 $Q_\alpha$ 为零，

$$Q_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = 0$$

对于保守力场，

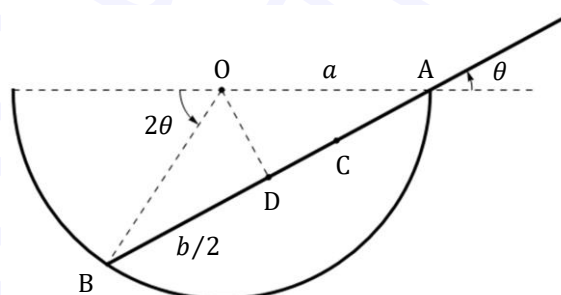
$$\vec{F}_i = - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}$$

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0.$$

虚功原理等价于势能取极值，

$$\delta V = 0$$

**例** 碗中的筷子：半径为 $a$ 的光滑半球形碗固定在桌面上，一根长 $l$ 的筷子放在碗中，一端搭在碗沿。若筷子保持平衡，求筷子位于碗内的部分的长度 $b$ 。



**解：** 取独立的广义坐标为 $b$ 。记筷子与水平面的夹角为 $\theta$ ，

$$2a \cos \theta = b \Rightarrow \cos \theta = \frac{b}{2a}$$

只有重力是主动力。以球心 $O$ 为坐标原点，筷子的质心 $C$ 在垂直方向的坐标是

$$y_c = - \left( b - \frac{l}{2} \right) \sin \theta$$

所以主动力的势能是

$$V = mg\left(\frac{l}{2} - b\right) \sin \theta = mg\left(\frac{l}{2} - b\right) \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

由虚功原理，平衡时必有

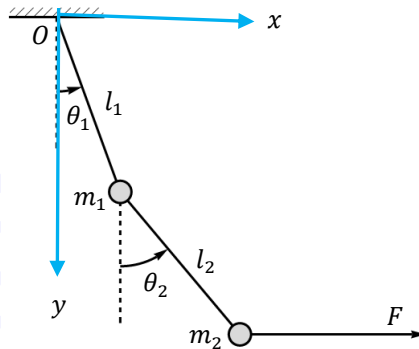
$$\frac{dV(b)}{db} = 0$$

$$mg \frac{-8a^2 + b(4b - l)}{4a^2 \sqrt{4 - \frac{b^2}{a^2}}} = 0$$

解得

$$l = \frac{-8a^2 + 4b^2}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{8}(l + \sqrt{l^2 + 128a^2}) \text{ (舍去 } b < 0 \text{ 的解)}$$

**例** 如图所示，两个小球通过绳子相连并悬挂在固定点，构成双摆。小球质量是 $m_1, m_2$ ，绳长 $l_1, l_2$ 。大小为 $F$ 的水平作用力向右拉第二个小球。求平衡时绳子与垂直方向的夹角 $\theta_1, \theta_2$ 。



**解** 取广义坐标为 $\theta_1, \theta_2$ 。

引进水平作用力的势能

$$V_h = -Fx = -F(l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)$$

两个小球的重力以及水平拉力是主动力，势能之和为

$$V = V_g + V_h = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) - F(l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)$$

由虚功原理，

$$\delta V = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0$$

即

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 - Fl_1 \cos \theta_1 = 0 \\ m_2 gl_2 \sin \theta_2 - Fl_2 \cos \theta_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan \frac{F}{(m_1 + m_2)g} \\ \theta_2 = \arctan \frac{F}{m_2 g} \end{cases}$$

### (3) 不独立广义坐标下的平衡方程

为了求约束力，有时特意不消除某个约束。此时广义坐标不独立，设满足几何约束

$$f_\sigma(t, q) = 0, \quad \sigma = 0, 1, \dots, k.$$

$$\rightarrow \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0$$

虚功原理给出

$$Q_\alpha \delta q_\alpha = 0$$

利用前面的式子消去不独立的变分，或者用拉氏乘子法。

$$\left( Q_\alpha + \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0 \Rightarrow Q_\alpha + \lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} = 0$$

上式和约束方程联立，可以求解平衡时的广义坐标以及拉氏乘子。

## 五、 拉格朗日方程

### 1. 理想完整系统的拉格朗日方程

拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736 年—1813 年，法国数学家、物理学家）希望在力学问题中避免繁琐的矢量分析，只利用动能和势能来表达运动方程。

对单个粒子这很容易做到。如果质点在保守势场  $V(t, \vec{x})$  中运动，

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial T}{\partial \vec{v}}$$

$$\vec{F} = -\nabla V$$

于是牛顿方程可以写成

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -\nabla V = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \vec{v}}$$

对质点组，设质点坐标由  $n$  个独立广义坐标确定，

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q)$$

$$\dot{\vec{x}}_i(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$$

从上式得到两个拉格朗日关系式，

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \\ \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_\beta} = \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial t \partial q_\beta} + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\beta} \end{cases}$$

现在从 d'Alembert 原理出发，把理想完整系统的运动方程改写成

$$\left. \begin{aligned} \sum_i (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{x}}_i) \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} &= 0 \\ Q_\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

把恒等式

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \right] - m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \quad (i \text{ 不求和})$$

代入运动方程得

$$\sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \right] - m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \right\} = Q_\alpha$$

再利用拉格朗日关系式，将运动方程变形为

$$\sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[ m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right] - m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} = Q_\alpha$$

注意到在采用广义坐标之后，质点组的动能满足关系式：

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_\alpha} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{cases}$$

最终我们得到了**基本形式的拉格朗日方程**<sup>2</sup>,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

拉格朗日方程中不含约束反力,也不再需要对力和加速度做矢量分析。

基本形式的拉格朗日方程仅适用于理想完整系统,广义坐标 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ 的数目(位形自由度)等于独立变分 $\{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n\}$ (动力学自由度)。

利用此方程,达朗贝尔原理可以改写成

$$\left( Q_\alpha + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0$$

上述方程只要求系统是理想的,既可以用于完整系统,也可用于非完整系统。

当主动力均为保守力时,设势函数为 $V(t, q)$ ,

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\alpha} = 0$$

定义**拉格朗日函数**(Lagrange function, 简称拉氏函数, 或称为拉氏量 Lagrangian)为

$$L(t, q, \dot{q}) \triangleq T(t, q, \dot{q}) - V(t, q)$$

那么**理想保守系统的拉格朗日方程**是

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

由于自然界的四种基本相互作用都是保守力,上面是拉格朗日方程最常用的形式。

如果定义**广义动量**<sup>3</sup>

$$p_\alpha \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

---

<sup>2</sup> Joseph Louis Lagrange, Mécanique analytique, first edition, 1788.

<sup>3</sup> 当势函数不依赖于广义速度时,与机械动量的定义 $p_\alpha \triangleq \partial T / \partial \dot{q}_\alpha$ 一致。

和广义力<sup>4</sup>

$$Q_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}$$

可以看出，运动方程即广义动量定理，

$$\dot{p}_{\alpha} = Q_{\alpha}$$

对于同时有保守力和非保守力（non-conservative force）的理想完整系统，将保守力表示为  $-\partial V/\partial q_{\alpha}$ ，非保守力记为  $Q_{\alpha}^{\text{nc}}$ ，拉氏函数定义为

$$L \stackrel{\text{def}}{=} T - V$$

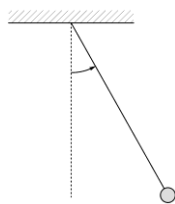
拉氏函数  $L$  已经描述了保守力的作用。从基本形式的拉格朗日方程，易得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha}^{\text{nc}}$$

拉格朗日方程是拉格朗日力学的第一原理，正如牛顿力学中的牛顿第二定律。

不同的拉格朗日函数  $L(t, q, \dot{q})$  描述的是不同的力学系统。拉氏函数完全决定了一个保守系统的动力学。拉氏函数由实验确定，或者作用力的理论模型给出。不过在应用时，我们仍会借助熟知的牛顿力学模型写出力学系统的拉氏量。

**例** （单摆）一个质量为  $m$  的小球，拴在无弹性轻绳上。绳子上端固定于一点，长度是  $l$ 。为简化问题，设系统在垂直平面内运动。



解：①运动学（建立坐标系，分析约束条件，选取广义坐标）

取绳子固定点为原点，水平向左为  $x$  轴，向下为  $y$  轴。以摆线与垂直方向夹角  $\theta$  为广义坐标，

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = l \cos \theta \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \dot{\theta} \cos \theta \\ -l \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

②写出拉格朗日函数

$$L(t, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

<sup>4</sup> 与前面的定义  $Q_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} -\partial V/\partial q_{\alpha}$  相比，这里的新定义把惯性力  $\partial T/\partial q_{\alpha}$  也归类于主动力。

③写出拉氏方程

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

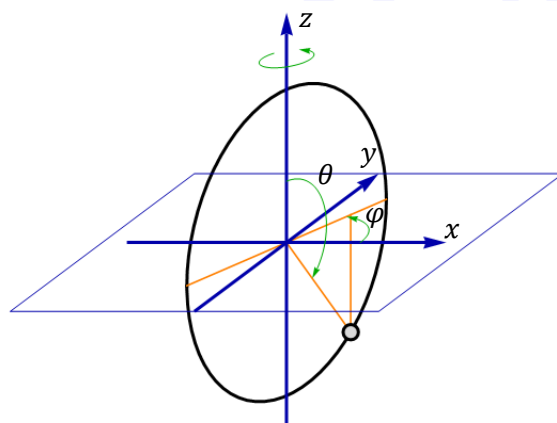
**例** 一个半径为 $R$ 的圆环在垂直平面中，以角速度 $\omega$ 绕通过圆心的垂直轴转动。环上穿着一珠子，珠子可以无摩擦地沿圆环滑动。求珠子的运动方程。

**解** ①建立坐标系，分析约束

以珠子的转角 $\theta$ 为广义坐标。记圆环转过的角度为 $\varphi = \omega t + \varphi_0$ 。

珠子的直角坐标为

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos(\omega t + \varphi_0) \\ y = R \sin \theta \sin(\omega t + \varphi_0) \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$



②拉氏函数

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \left[ mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta \right] \end{aligned}$$

③运动方程

$$R\ddot{\theta} - g \sin \theta - \omega^2 R \sin \theta \cos \theta = 0$$

④求解

由于方程不显含时间，可作变量替换

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\theta}^2)}{d\theta},$$

$$\dot{\theta}^2 = 2 \int \left[ \frac{g}{R} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta \right] d\theta = \omega^2 \cos^2 \theta + \frac{2g}{R} \cos \theta + c$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\omega^2 \cos^2 \theta + \frac{2g}{R} \cos \theta + c}} = dt \Rightarrow \dots$$

## 2. 有多余坐标时的拉氏方程

如果有非完整约束，或者出于求某些约束力的目的保留了额外的坐标参数，则广义坐标的变分不独立，不能直接从达朗贝尔原理导出运动方程。

一般来说，可以设广义坐标满足微分约束方程

$$f_\sigma(t, q, \dot{q}) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k.$$

同时变分约束方程的形式是

$$c_{\sigma\alpha}(t, q, \dot{q}) \delta q_\alpha = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k.$$

对几何约束，

$$f_\sigma(t, q) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0 \Rightarrow c_{\sigma\alpha} = \frac{\partial f_\sigma(t, q)}{\partial q_\alpha}$$

对线性非完整约束，Hölder 规则成立，

$$f_\sigma(t, q, \dot{q}) = c_{\sigma\alpha}(t, q) \dot{q}_\alpha + c_{\sigma 0}(t, q) = 0 \Rightarrow c_{\sigma\alpha}(t, q) = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

至于非线性非完整约束（牛顿力学的问题中不存在）， $f_\sigma(t, q, \dot{q})$  与  $c_{\sigma\alpha}(t, q, \dot{q})$  没有确定的关系，两者都需要从原来的物理模型中分析得到。

按前面的推导，达朗贝尔原理可以写成

$$\left\{ \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] - Q_\alpha \right\} \delta q_\alpha = 0$$

由于虚位移  $\{\delta q_\alpha | \alpha = 1, 2, \dots, n\}$  线性相关，

$$c_{\sigma\alpha}(t, q, \dot{q}) \delta q_\alpha = 0$$

需要引入拉氏乘子  $\lambda_\sigma(t)$ ，

$$\left\{ \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right] - Q_\alpha - \lambda_\sigma c_{\sigma\alpha} \right\} \delta q_\alpha = 0$$

所以有多余坐标时的拉氏方程是

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}$$

如果系统中的主动力都是保守力，那么可以引进拉氏函数，

$$L(t, q, \dot{q}) = T - V$$

运动方程是

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}$$

如果理想系统的主动力中既有保守力，又有非保守力 $Q_\alpha^{\text{nc}}$ ，那么

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{\text{nc}} + \lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}$$

上式中的拉氏函数已经包含了保守力的贡献。

### 3. 完整约束和扩展拉格朗日函数

如果理想系统的广义坐标有多余，且原因是满足一些完整约束，那么

$$f_\sigma(t, q) = 0, \quad c_{\sigma\alpha} = \frac{\partial f_\sigma(t, q)}{\partial q_\alpha}$$

运动方程是

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_\sigma(t) \frac{\partial f_\sigma(t, q)}{\partial q_\alpha}$$

乘子 $\lambda_\sigma(t)$ 与广义坐标、广义速度无关，上式可以改写成

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} [L + \lambda_\sigma(t) f_\sigma(t, q)] - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} [L + \lambda_\sigma(t) f_\sigma(t, q)] = 0$$

定义系统的**扩展拉格朗日函数**（extended Lagrangian function）为

$$L_{\text{ext}}(t, q, \dot{q}, \lambda) \triangleq L(t, q, \dot{q}) + \lambda_\sigma(t) f_\sigma(t, q)$$

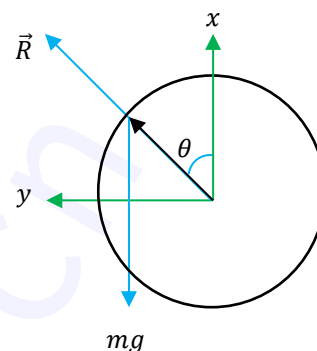
我们可以把 $\{q_\alpha(t) | \alpha = 1, 2, \dots, n\}$ 和 $\{\lambda_\sigma(t) | \sigma = 1, 2, \dots, k\}$ 全部视为广义坐标，拉氏方程是

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial q_\alpha} = 0, & \alpha = 1, 2, \dots, n; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial \dot{\lambda}_\sigma} - \frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial \lambda_\sigma} = 0, & \sigma = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

拉氏乘子对应的拉氏方程，其实是约束条件。

**例** 一个静止于光滑圆柱顶部的质点，受微小扰动后开始从圆柱顶上滑下，求质点脱离柱面的位置。

**解 1:** 质点脱离柱面时，柱面的支撑力为零。为了在运动方程中保留约束反力，我们需要保留多余的坐标。



### ①运动学

取平面极坐标 $(r, \theta)$ 为广义坐标。记圆柱的半径为 $a$ ，在未脱离表面时，系统满足几何约束

$$r - a = 0$$

### ②拉格朗日函数

只有重力是主动力。系统拉氏函数是

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta$$

引进拉氏乘子 $\lambda(t)$ ，定义扩展拉格朗日函数，

$$L_{\text{ext}}(r, \theta, \lambda, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta + \lambda(t)(r - a)$$

### ③运动方程

利用扩展拉氏函数写出运动方程，

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mgr \sin \theta \end{cases}$$

### ④求解

把约束条件代入方程，

$$\begin{cases} \lambda = mg \cos \theta - ma\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} = g \sin \theta \end{cases}$$

变换第二个方程得

$$a\dot{\theta}d\dot{\theta} = g \sin \theta d\theta$$

积分，并利用初条件

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

解得（利用机械能守恒可以直接写出这个式子）

$$a\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos \theta)$$

把上式代入第一个运动方程，在脱离点处有

$$\lambda = 3mg \cos \theta - 2mg = 0$$

所以脱离柱面时，

$$\theta = \arccos \frac{2}{3}$$

解 2：上面的解法很繁琐。

我们可以不保留多余的广义坐标，利用拉格朗日力学求解出 $\theta(t)$ ，然后利用牛顿方程求受力。

①运动学：取 $\theta$ 为广义坐标。

②拉氏函数：只有重力是主动力。拉格朗日函数是

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga \cos \theta$$

③运动方程：利用拉氏函数写出运动方程，

$$ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta$$

④求解：从拉氏方程积分得

$$a\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos \theta)$$

⑤约束反力：代入牛顿方程

$$F_r = ma_r, \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

得径向加速度满足

$$\begin{aligned} -mg \cos \theta + N &= m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = ma\dot{\theta}^2 \\ \Rightarrow N &= mg \cos \theta - 2mg(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

脱离的时刻支撑力 $N$ 为零，

$$N = 0 \Rightarrow \theta = \arccos \frac{2}{3}$$

**例** 一个质量为 $m$ 的滑块在斜面上运动。记接触面的摩擦系数为 $\mu$ ，斜坡与水平面夹角为 $\alpha$ 。写出滑块的运动方程。

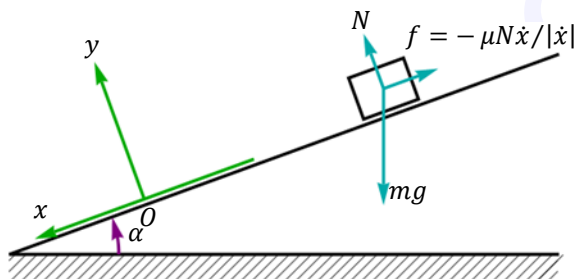
解：①运动学

以沿着斜坡向下方向为 $x$ -轴，垂直于斜坡向上的方向为 $y$ -轴。

约束条件“沿斜坡运动”，即质心坐标的 $y$ 分量是常数，约束方程是

$$y(t) = y_c$$

这是几何约束。由于摩擦力的虚功不为零，所以这不是理想约束。只有把与坡面约束相关的支撑力和摩擦力当作主动力对待，这才是一个理想系统，才可以应用达朗贝尔原理或者拉格朗日方程。



## ②拉氏函数和非保守力

支撑力和摩擦力是

$$\vec{N} = N(t)\vec{e}_y, \quad \vec{f} = -\mu N(t)\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\vec{e}_x$$

另外一个主动力——重力，是保守力，相应的势能是

$$V = mg(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

由于与约束有关的力已作为主动力予以考虑，不要在拉氏函数中重复引进拉氏乘子项。

## ③运动方程

由此写出运动方程，

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mg \sin \alpha = -\mu N(t)\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \\ m\ddot{y} + mg \cos \alpha = N(t) \end{cases}$$

与约束方程联立，解得

$$N(t) = mg \cos \alpha$$

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

**例** 平板冰橇的底部有一个冰刀，冰橇的质心与冰刀重合。求冰橇在斜坡上运动轨迹。

解：①运动学：建立坐标系，分析约束条件。

取质心坐标 $x, y$ 和冰刀与 $x$ 轴的夹角 $\theta$ 为广义坐标。

冰刀只能沿其指向运动，

$$(\Delta x, \Delta y) \propto (\cos \theta, \sin \theta)$$

满足差分约束方程

$$\sin \theta \Delta x - \cos \theta \Delta y = 0$$

利用差分方程，得可能位移满足的微分约束方程

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$

以及虚位移满足的变分约束方程

$$\sin \theta \delta x - \cos \theta \delta y = 0$$

把约束方程写成法夫形式，

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sin \theta dx - \cos \theta dy = 0$$

再利用弗罗本尼斯定理判别可积性，

$$d\omega = -\cos \theta dx \wedge d\theta - \sin \theta dy \wedge d\theta$$

$$\omega \wedge d\omega = -dx \wedge dy \wedge d\theta \neq 0$$

$\omega$ 不可积，是非完整约束。

②写出拉格朗日函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \vec{v}^2 + \frac{1}{2} I \vec{\omega}^2 - V = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mgy \sin \alpha$$

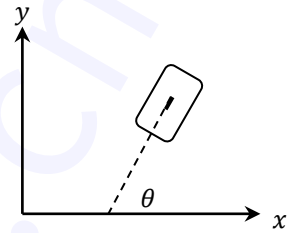
其中 $M$ 是质量， $I$ 是绕过质心的垂直轴转动的转动惯量。

③写出运动方程

$$\begin{cases} M\ddot{x} &= \lambda \sin \theta \\ M\ddot{y} + Mg \sin \alpha &= -\lambda \cos \theta \\ I\ddot{\theta} &= 0 \end{cases}$$

运动方程与微分约束方程

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$



联立，可解出未知函数 $(x, y, \theta, \lambda)$ 。

④求解

从第三个方程解出

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0$$

利用前两个方程消去 $\lambda$ ，得

$$\ddot{x} = -(\ddot{y} + g \sin \alpha) \tan \theta$$

(1) 当 $\omega_0 \neq 0$ 时，以 $\theta$ 为参量，

$$x = x(\theta(t)), \quad \dot{x} = \omega_0 \frac{dx}{d\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 x', \quad \ddot{x} = \omega_0^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0^2 x''$$

$$y = y(\theta(t)), \quad \dot{y} = \omega_0 y', \quad \ddot{y} = \omega_0^2 y''$$

$$\ddot{x} = -(\ddot{y} + g \sin \alpha) \tan \theta \rightarrow \omega_0^2 x'' = -(\omega_0^2 y'' + g \sin \alpha) \tan \theta$$

约束条件成为

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \Rightarrow x' = y' \cot \theta$$

$$\Rightarrow x'' = -\frac{1}{\sin^2 \theta} y' + \cot \theta y''$$

代入运动方程消去 $x''$ ，

$$y'' - \cot \theta y' + \frac{g \sin \alpha}{\omega_0^2} \sin^2 \theta = 0$$

再作变量代换，令

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta, \quad y = y(u)$$

$$y' = -\sin \theta \frac{dy}{du}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{du^2} (1 - u^2) - \frac{dy}{du} u$$

代入方程后解得

$$y'' - \cot \theta y' + \frac{g \sin \alpha}{\omega_0^2} \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{du^2} + \frac{g \sin \alpha}{\omega_0^2} = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos \theta - \frac{g \sin \alpha}{2\omega_0^2} \cos^2 \theta + \left( y_0 + \frac{v_0}{\omega_0} + \frac{g \sin \alpha}{2\omega_0^2} \right)$$

进一步求得 $x(\theta)$ ，

$$x = \int dx = \int \cot \theta dy = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \theta + \frac{g \sin \alpha}{2\omega_0^2} (\sin \theta \cos \theta + \theta) + x_0$$

冰橇会匀速旋转，同时划过周期曲线轨迹。由于忽略了摩擦力，冰橇能够一直在一定高度上振荡，不会滑到坡下。

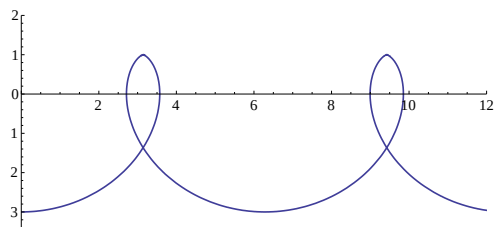


图 1  $a=2, b=1$

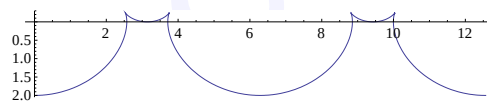


图 2  $a=1, b=1$

注：插图用 Mathematica 绘制，

```
ParametricPlot[{a Sin[θ]+b (Sin[θ] Cos[θ]+θ)+y₀, -a Cos[θ]-b Cos[θ]^2+x₀}/.{a->2,b->1,x₀->0,y₀->0},{θ,0,4 Pi}]
```

(2) 当  $\omega_0 = 0$  时，冰橇不旋转， $\theta = \theta_0$ ，

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan \theta_0 \Rightarrow y - y_0 = (x - x_0) \tan \theta_0$$

$$\ddot{x} = -(\ddot{y} + g \sin \alpha) \tan \theta_0 \Rightarrow \ddot{x} + \ddot{x} \tan^2 \theta_0 = -g \sin \alpha \tan \theta_0 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{2} \sin \alpha \sin 2\theta_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{gt^2}{4} \sin \alpha \sin 2\theta_0 + v_0 t \cos \theta_0 + x_0 \\ y = -\frac{gt^2}{4} \sin \alpha (1 - \cos 2\theta_0) + v_0 t \sin \theta_0 + y_0 \end{cases}$$

$$y = (x - x_0) \tan \theta_0 + y_0$$

这是匀加速直线运动。

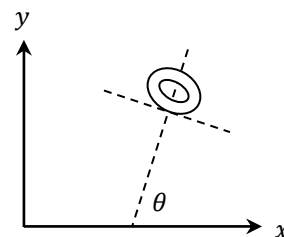
**例** 直立轮子在水平面上的无滑滚动，不受外力作用时，求轨迹。

为了实现直立滚轮，可在前面双轮的例子中，轴的正中间加上用轴承连接的第三个轮子，且设两边的轮子以及车轴质量很小可忽略不计。这是一个古老的例题，之所以只讨论直立的情形，是为了简化问题。

解：①建立坐标系，分析约束

取广义坐标为轮心的位置  $(x, y)$ ，轮轴与  $x$  轴的夹角  $\theta$ ，以及轮子绕轮轴转过的角度  $\varphi$ 。

轮子前进的方向与  $x$  轴的夹角为  $\theta - \frac{\pi}{2}$ ，无滑滚动给出约束



$$\Delta x = R\Delta\varphi \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \quad \Delta y = R\Delta\varphi \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

写成法夫形式,

$$\omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} dx - R \sin \theta d\varphi, \quad \omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} dy + R \cos \theta d\varphi$$

两者线性无关, 外积是

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \wedge \omega_2 = dx \wedge dy + R \cos \theta dx \wedge d\theta + R \sin \theta dy \wedge d\theta$$

$$\Omega \wedge d\omega_1 = -R \cos \theta dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi \neq 0$$

利用弗罗本尼斯定理, 可判定约束方程是不可积的。

利用约束的差分方程, 得真实位移满足的微分约束方程是

$$\begin{cases} \dot{x} = R \sin \theta \dot{\varphi} \\ \dot{y} = -R \cos \theta \dot{\varphi} \end{cases}$$

而虚位移满足的变分约束方程则是

$$\begin{cases} \delta x = R \sin \theta \delta\varphi \\ \delta y = -R \cos \theta \delta\varphi \end{cases}$$

②写出系统的拉氏函数

$$L = T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$$

③写出运动方程

利用保守系统的达朗贝尔原理,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \delta q_\alpha = 0$$

不引进拉氏乘子, 直接利用变分约束条件消去不独立变分 $\delta x, \delta y$ , 得沃尔涅兹 (Voronec) 方程

$$\begin{cases} \begin{cases} M(\ddot{x}R \sin \theta - \ddot{y}R \cos \theta) + I_1\ddot{\varphi} &= 0 \\ I_2\ddot{\theta} &= 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x} &= R \sin \theta \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= -R \cos \theta \dot{\varphi} \end{cases} \end{cases}$$

④求解方程

由第二个运动方程得

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0$$

对两个约束方程求导,

$$\begin{cases} \ddot{x} = R \sin \theta \ddot{\varphi} + \omega_0 R \cos \theta \dot{\varphi} \\ \ddot{y} = -R \cos \theta \ddot{\varphi} + \omega_0 R \sin \theta \dot{\varphi} \end{cases}$$

代入第一个运动方程,

$$(MR^2 + I_1)\ddot{\varphi} = 0$$

$$\varphi = \omega_1 t + \varphi_0$$

最后对两个约束方程积分, 得

$$x = \int dx = \int R \sin \theta d\varphi = R \int \sin(\omega_0 t + \theta_0) \omega_1 dt = -\frac{\omega_1}{\omega_0} R \cos(\omega_0 t + \theta_0) + c_1$$

$$y = \int dy = -\int R \cos \theta d\varphi = -\int R \cos(\omega_0 t + \theta_0) \omega_1 dt = -\frac{\omega_1}{\omega_0} R \sin(\omega_0 t + \theta_0) + c_2$$

在不受外力时, 系统作圆周运动。

#### 4. 有冲击力时的系统

在很短的时间内, 施加很大的作用力, 并且其冲量有限, 可以称之为**冲击力**。冲击力可以用狄拉克冲击函数描述 (附录有简介)。

设在  $t = 0$  时, 有冲击力

$$Q_\alpha(t) = I_\alpha \delta(t)$$

作用于理想系统。

对基本形式的拉格朗日方程积分  $\int_{0-}^{0+} dt$ , 得到

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right|_{0-}^{0+} - \int_{0-}^{0+} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt = I_\alpha$$

对恰当定义的广义坐标, 动能对广义坐标的偏导数存在且有界,

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \text{ 有界} \Rightarrow \int_{0-}^{0+} \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt = 0$$

于是在打击前后机械动量之差是

$$p_\alpha(0+) - p_\alpha(0-) = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right|_{0-}^{0+} = I_\alpha$$

质点组的动能

$$T(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ \left( \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \right]$$

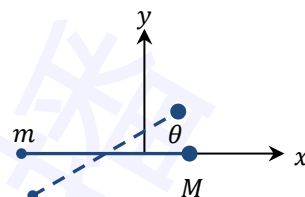
计算偏导数,

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \left[ \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial t \partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma \right]$$

只要我们在选取广义坐标时, 要求  $\vec{x}_i = \vec{x}_i(t, q)$  对各个自变量的二阶偏导数均存在, 那么  $\partial T / \partial q_\alpha$  的有界性必能满足。

**例** 设两个质点质量不等, 分别为  $m, M$ , 固定在长度为  $a$  的无质量轻杆两端。初始时杆静止, 在距离  $M$  质点距离  $b$  的  $D$  处, 突然施加垂直于杆身的冲量  $K$ 。求冲击结束时杆的运动状态。

解: ①如图, 杆的运动可以用  $x_C, y_C, \theta$  三个广义坐标描述。



$$\begin{cases} \vec{x}_C = \frac{m\vec{x}_m + M\vec{x}_M}{M+m} \\ |\vec{x}_M - \vec{x}_m| = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = x_C + \left( \frac{ma}{M+m} - b \right) \cos \theta \\ y_D = y_C + \left( \frac{ma}{M+m} - b \right) \sin \theta \end{cases}$$

②广义力是

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_D \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial q_\alpha} = K \delta(t) \vec{e}_y \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial q_\alpha}$$

积分得广义冲量,

$$I_\alpha = \int_{0-}^{0+} Q_\alpha(t) dt = K \vec{e}_y \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial q_\alpha}$$

$$I_{x_C} = K \vec{e}_y \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial x_C} = 0, \quad I_{y_C} = K \vec{e}_y \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial y_C} = K, \quad I_\theta = K \vec{e}_y \cdot \frac{\partial \vec{x}_D}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = K \left( \frac{ma}{M+m} - b \right)$$

由柯尼西定理, 动能是

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}_m^2 + \frac{1}{2} M \dot{\vec{x}}_M^2 = \frac{1}{2} (M+m) (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} a^2 \dot{\theta}^2$$

③拉氏方程为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} \right|_{0-}^{0+} = I_{x_C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} \right|_{0-}^{0+} = I_{y_C}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right|_{0-}^{0+} = I_\theta$$

④解得

$$\dot{x}_C(0+) = 0, \quad \dot{y}_C(0+) = \frac{K}{M+m}, \quad \dot{\theta}(0+) = \frac{K[m(a-b) - Mb]}{Mma^2}.$$

## 六、 拉格朗日函数的一般性质

拉格朗日函数含有系统的全部动力学信息，很有必要研究其一般性质。

### 1. 可加性

两个独立系统，例如两个谐振子

$$L_1(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1x^2, \quad L_2(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_2y^2$$

我们可以把拉氏量加在一起，

$$\begin{aligned} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &\stackrel{\text{def}}{=} L_1(x, \dot{x}) + L_2(y, \dot{y}) \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k_2y^2 \end{aligned}$$

新拉格朗日函数 $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 给出两个拉氏方程，与原来的两个拉格朗日函数 $L_1(x, \dot{x}), L_2(y, \dot{y})$ 等效。

两个分离的系统，可以把拉氏函数相加，合并为一个大的系统来描述。

反过来看，如果一个系统的拉氏函数可以**分离变量**，能够写成两个没有公共的广义坐标的拉氏函数之和，则看成是两个独立的子系统组成。

### 2. 拉氏函数的不确定性

不同的拉氏函数，会给出不同的运动方程。在不影响运动方程的前提下，拉氏函数是否可以改动？

拉氏方程中出现的项，都是拉氏函数的偏导数，因此拉氏函数加上一个常数，不会影响系统的动力学。我们的问题是，拉氏函数是否存在更一般的不确定性。

定义**欧拉算子** $\hat{E}$ ，作用于拉氏函数 $L(t, q, \dot{q})$ ，

$$\hat{E}L(t, q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

运动方程即

$$\hat{E}L(t, q, \dot{q}) = 0$$

**定理<sup>5</sup>** 对两个拉氏函数 $L'$ 和 $L$ ，有

---

<sup>5</sup> M. Henneaux, Annales of Physics (NY) 140 (1982), 45.

$$L'(t, q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} L(t, q, \dot{q}) + \frac{d\varphi(t, q)}{dt} \Leftrightarrow \hat{E}L' = \hat{E}L$$

直接计算即可验证必要性成立。

逆定理的证明比较复杂，见附录。

全微商 $d\varphi(t, q)/dt$ 称为**规范项**（与规范相互作用有关）。规范项的不确定性，从下一章的最小作用量原理的角度会比较容易看出。

**例** 一个一位拉格朗日系统的拉氏函数是

$$L' = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 V(x) - V^2(x)$$

对应的拉氏方程为

$$(m\dot{x}^2 + 2V)m\ddot{x} + 2m\dot{x}^2 V' = m\dot{x}^2 V' - 2VV' \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V\right)(m\ddot{x} + V') = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + V' = 0,$$

这等价于拉氏函数

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

给出的运动方程。

两个拉氏函数都可以用于质点在一维保守力场中的运动。

这个例子说明，拉氏函数不仅可以相差一个规范项，还有可能作更复杂的非线性变形。

### 3. 反变分问题\*

是不是每一组微分方程都是拉格朗日方程？换言之，是否用微分方程描述的动力学系统，都是拉格朗日系统？物理学家亥姆霍兹（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz）研究了这一问题。

**定理**（亥姆霍兹条件，1887 年） 二阶微分方程组

$$\ddot{q}_\alpha = f_\alpha(t, q, \dot{q})$$

存在等价的拉格朗日方程（拉氏函数是 $L(t, q, \dot{q})$ ）

$$M_{\alpha\beta}(t, q, \dot{q})\ddot{q}_\beta = F_\alpha(t, q, \dot{q})$$

$$F_\alpha(t, q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} M_{\alpha\beta}(t, q, \dot{q})f_\beta(t, q, \dot{q})$$

的充要条件是，存在满足方程组

$$\begin{cases} M^T = M \\ \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \dot{q}_\gamma} = \frac{\partial M_{\gamma\alpha}}{\partial \dot{q}_\beta} \\ \frac{d}{dt} M = -\frac{1}{2}(M\Phi - \Phi^T M) \\ M\Psi - \Psi^T M = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M\Phi - \Phi^T M) \end{cases}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta}, \quad \Psi_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\beta}$$

的惯性矩阵 $M_{\alpha\beta}(t, q, \dot{q})$ （J. Douglas 1941）。可见，

用微分方程描述其演化过程的系统，并非都是拉格朗日系统。

**定理** Darboux<sup>6</sup>

每个二次常微分方程

$$\ddot{q} = f(t, q, \dot{q})$$

都存在一个乘子 $M(t, q, \dot{q})$ ，使之成为拉格朗日方程。

**例** 一维阻尼振子可以用 Bateman-Caldirola-Kanai 拉氏函数描述，

$$L = e^{\frac{\mu}{m}t} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right)$$

可得运动方程

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

但这个拉氏函数难以推广到多自由、各向异性的情形。（另外，阻尼力还可用分数阶导数表示）

## 七、首次积分

一般来说，保守系统的拉氏函数 $L(t, q, \dot{q})$ 是时空和广义速度的函数。当系统的拉氏函数不依赖于某一变量时，就能够找到运动方程的**首次积分**（即守恒量，又称运动积分），可用来在求解过程中简化运动方程。

<sup>6</sup> G. Darboux, Lecon sur la Theorie Generale des Surfaces, Gauthier-Villars, Paris, 1894.

## 1. 拉氏函数不含某个坐标：广义动量守恒

拉氏函数的变量中不出现的广义坐标，称为**循环坐标**（cyclic coordinates）或**可遗坐标**（ignorable coordinates）。

当 $q_\alpha$ 是循环坐标时，

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \Rightarrow p_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{constant}.$$

对应的广义动量 $p_\alpha$ 是守恒量<sup>7</sup>。

对于满足完整约束

$$f_\sigma(t, q) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k$$

的保守系统，

$$L_{\text{ext}}(t, q, \lambda, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) - \lambda_\sigma(t) f_\sigma(t, q)$$

当扩展拉氏函数有循环坐标时，

$$\frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial q_\alpha} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

广义动量是守恒量，

$$p_\alpha = \frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

对于线性非完整保守系统，拉氏方程是

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_\sigma(t) c_{\sigma\alpha}(t, q)$$

约束方程是

$$f_\sigma(t, q, \dot{q}) = c_{\sigma\alpha}(t, q) \dot{q}_\alpha + c_{\sigma 0}(t, q) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k$$

由于

---

<sup>7</sup> C. G. J. Jacobi, Vorlesungen Über Dynamik, Werke, Supplementband. Reimer, Berlin, 1884.

$$c_{\sigma\alpha}(t, q) = \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$$

$$\dot{p}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} + \lambda_{\sigma}(t) \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$$

必须同时满足两个条件，

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0 \\ \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

广义动量 $p_{\alpha}$ 才是守恒量。

**例** 质点在重力场中作抛物运动，拉格朗日函数是

$$L(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

$x$ 和 $y$ 是循环坐标，

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

所以对应的广义动量是守恒量，

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{constant}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{constant}$$

**例** 质点在中心力场中的作平面运动，采用平面极坐标系，拉氏函数是

$$L(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

$\theta$ 是循环坐标，所以角动量

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

守恒。

## 2. 拉氏函数不含时间：广义能量守恒

(1) 保守系统的广义能量积分

计算拉氏函数对时间的全导数，并利用拉氏方程，

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &\equiv \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \Rightarrow \frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$H \stackrel{\text{def}}{=} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

上式为贝尔特拉米恒等式（Beltrami identity）。上式中的 $H$ 称为**广义能量**。

如果拉格朗日函数不依赖于时间（称为**自治系统** autonomous system，或者**时不变系统** time invariant system），

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

广义能量 $H$ 是守恒量<sup>8</sup>。这个结论不仅可应用于牛顿力学问题，也适用一般的保守拉氏系统。

## （2）质点组的广义能量

限制在牛顿力学范围中讨论，质点组的速度是

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t}$$

动能是

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right)^2 = T_2 + T_1 + T_0$$

其中 $T_0, T_1, T_2$ 分别是广义速度的零次项、一次项和二次项，

$$T_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_i m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_\alpha, \quad T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \right)^2.$$

设势函数是

$$V = V(t, q)$$

利用齐次函数的欧拉定理，广义能量是

---

<sup>8</sup> J. R. Schütz, Gött. Nachr. (1897), p.110.

$$H = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = 2T_2 + T_1 - L = T_2 - T_0 + V$$

这时的广义能量积分又称**雅可比积分**。

在定常系统中，

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q)$$

动能只有广义速度的二次项，

$$T_1 = T_0 = 0, \quad T = T_2$$

$$H = T + V$$

即机械能守恒，这时的广义能量又称为**哈密顿积分**。

如果势函数与广义速度有关，例如后面章节讨论的非相对论带电粒子在电磁场中的运动，势函数是广义速度的一次函数（称为**广义势**），

$$V(t, q, \dot{q}) \equiv \phi(t, q) + A_\alpha(t, q) \dot{q}^\alpha$$

系统的拉格朗日函数是

$$L(t, q, \dot{q}) = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - \phi(t, q) - A_\alpha(t, q) \dot{q}^\alpha$$

那么

$$p_\alpha \dot{q}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha = 2T_2 + T_1 - A_\alpha \dot{q}^\alpha$$

广义能量积分是

$$\begin{aligned} H &= p_\alpha \dot{q}^\alpha - L \\ &= 2T_2 + T_1 - A_\alpha \dot{q}^\alpha - (T_2 + T_1 + T_0 - \phi + A_\alpha \dot{q}^\alpha) \\ &= T_2 - T_0 + \phi \end{aligned}$$

- （3）有多余坐标的完整保守系统的广义能量积分  
保守系统中有多余的广义坐标，满足 $k$ 个完整约束，

$$f_\sigma(t, q) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k$$

扩展拉氏函数是

$$L_{\text{ext}}(t, q, \lambda, \dot{q}) = L(t, q, \dot{q}) + \lambda_{\sigma} f_{\sigma}(t, q)$$

如果扩展系统不含时，

$$\frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \lambda_{\sigma} \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial t} = 0$$

注意上式对自变量 $\{t, q, \lambda, \dot{q}\}$ 的任意取值都成立，因此等价于下面 $k+1$ 个等式，

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial t} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

利用前面的结论，广义能量

$$H_{\text{ext}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L_{\text{ext}}}{\partial \lambda_{\alpha}} \dot{\lambda}_{\alpha} - L_{\text{ext}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L(t, q, \dot{q}) - \lambda_{\sigma} f_{\sigma}(t, q)$$

是守恒量。

真实运动需要满足约束方程，所以广义能量简化为

$$H_{\text{ext}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L(t, q, \dot{q}) = H$$

与无约束系统的表达式相同。

总之有

广义坐标满足定常几何约束的自治系统，广义能量守恒。

#### (4) 非完整保守系统的广义能量积分

设 $\partial L / \partial t = 0$ ，于是

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha}$$

守恒量是运动过程中保持不变的力学量，还需要满足拉格朗日方程和微分约束方程，

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = \lambda_{\sigma}(t) c_{\sigma\alpha}(t, q, \dot{q}) \\ f_{\sigma}(t, q, \dot{q}) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

代入前式得，

$$\frac{dL}{dt} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \lambda_{\sigma} c_{\sigma\alpha} \right) \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) - \lambda_{\sigma} c_{\sigma\alpha} \dot{q}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L \right) = \lambda_\sigma(t) c_{\sigma\alpha}(t, q, \dot{q}) \dot{q}_\alpha$$

对于非线性非完整系统，变分约束方程中的系数 $c_{\sigma\alpha}(t, q)$ 与微分约束方程中的 $f_\sigma(q, \dot{q})$ 之间，不存在模型无关的关系，因而未必能够得到守恒量。

下面只限于讨论牛顿力学问题中的线性非完整约束。这时 Hölder 规则成立，

$$f_\sigma(t, q, \dot{q}) = c_{\sigma\alpha}(t, q) \dot{q}_\alpha + c_{\sigma 0}(t, q) = 0$$

真实运动满足

$$\frac{dH}{dt} = \lambda_\sigma (f_\sigma(t, q, \dot{q}) - c_{\sigma 0}(t, q)) = -\lambda_\sigma c_{\sigma 0}(t, q)$$

所以有（注意某些教材中的论断不正确）：

对于线性齐次非完整（即 $c_{\sigma 0}(t, q)=0$ ）的保守系统，如果拉氏函数不含时，则广义能量 $H = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$ 是守恒量。

**例** 前面的直立滚轮是保守系统，非完整约束约束方程

$$\begin{cases} \dot{x} = R \sin \theta \dot{\phi} \\ \dot{y} = -R \cos \theta \dot{\phi} \end{cases}$$

关于广义速度是线性齐次的，并且拉氏函数

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2$$

不含时，因而系统的广义能量

$$H = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2$$

守恒。

从摩擦力不做功，可以直接得知这一简单结论。

### 3. 拉氏函数不依赖某个广义速度：隐含的约束条件

不妨设拉氏函数不依赖于广义速度 $\dot{q}_1$ ，

$$\partial L(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) / \partial \dot{q}_1 = 0$$

那么可以由拉氏方程

$$\partial L(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) / \partial q_1 = 0$$

解出

$$q_1 = q_1(t, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

广义坐标 $q_1$ 可以用其它的坐标和速度来表示，仅仅是个**辅助变量**。

前文曾讨论过，在扩展拉氏函数 $L_{\text{ext}}$ 中，乘子 $\lambda_\sigma$ 可以看作广义坐标，正好符合这样的情况。

更一般地，系统的拉氏函数 $L$ 关于速度的海斯矩阵（Hessian matrix）

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right) \neq 0$$

非奇异，则称之为**正规系统**， $L$ 称为**正规拉氏量**。反之，若

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right) = 0$$

则称为**奇异系统**， $L$ 称为**奇异拉氏量**。

奇异系统的拉氏函数有可能显示依赖所有的广义速度，但是运动方程会给出一个或多个（隐含的）**拉格朗日约束**。

**例** 考虑一个三自由度系统，拉氏函数是

$$L(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + az^2 - xyz$$

那么拉格朗日方程是

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -yz \\ m\ddot{y} = -xz \\ 2az - xy = 0 \end{cases}$$

第三个方程是拉格朗日约束，可以由它解出

$$z = \frac{xy}{2a}$$

代入前两个方程得

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{xy^2}{2a} \\ m\ddot{y} = -\frac{x^2y}{2a} \end{cases}$$

为了得到一个等效的两维拉格朗日系统，对上式右边的广义力

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = Q_x = -\frac{xy^2}{2a}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y} = Q_y = -\frac{x^2y}{2a}$$

积分得到势函数

$$V(x, y) = \frac{x^2y^2}{4a}$$

于是等效拉氏函数是

$$\tilde{L}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{x^2y^2}{4a}$$

这一系统实际上只有两个独立的运动自由度 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，而 $z(t)$ 仅仅是一个辅助变量。

## 八、 位力定理

### 1. 牛顿力学系统

在质点组的牛顿方程

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

的两边同乘以 $d\vec{x}_i$ ，可得动量定理；同点乘 $d\vec{x}_i$ ，可得动能定理；同叉乘 $\vec{x}_i$ ，可得角动量定理。

若方程两边同时点乘 $\vec{x}_i$ ，则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \vec{x}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{x}_i) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i^2 &= \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \end{aligned}$$

物理量 $A$ 的长时间平均定义为

$$\langle A \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A dt$$

对方程两边同取长时间平均得

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left( \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{x}_i \right) \Big|_0^\tau - 2\langle T \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle$$

当 $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{x}_i$ 有界时，则上式第一项为零。例如粒子若只能在有限范围内运动，则动量和坐标均有界。此时

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle$$

此为**位力定理**<sup>9</sup>（Virial theorem）。

## 2. 作为拉格朗日系统的质点组

在拉格朗日力学框架下，对定常（指 $\partial \vec{x}_i / \partial t = 0$ ）非相对论系统，利用拉氏方程的基本形式可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} &= Q_\alpha \Rightarrow q_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - q_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = q_\alpha Q_\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \left( q_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \Big|_0^\tau \right) - \left\langle \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\rangle - \left\langle q_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right\rangle &= \langle q_\alpha Q_\alpha \rangle \\ q_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \Big|_0^\tau \text{ 有界} \Rightarrow \text{第一项为零} & \\ \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = T_2 \Rightarrow \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} &= 2T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle q_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right\rangle - \frac{1}{2} \langle q_\alpha Q_\alpha \rangle$$

如果主动力均为保守力，那么

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

合并位力定理等式右边的两项，

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

得质点组的位力定理是

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle q_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right\rangle$$

<sup>9</sup> 等式右边正比于位力均积，位力既是 virial 的音译，又解释定理的含义，称得上信、达、雅。

### 3. 拉格朗日系统中的位力定理

对一般的拉格朗日系统，可以得到类似的结论，

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} &= 0 \\ q_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} &\text{有界} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\langle \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\rangle = - \left\langle q_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right\rangle$$

这里不需要限制  $L = T - V$ ，可以不是牛顿力学系统。

在量子力学中同样有位力定理，并且与经典物理学中的维里定理在形式上一致

**例** 若质点的势能是直角坐标的齐次函数，

$$V(\lambda \vec{x}) = \lambda^n V(\vec{x})$$

由齐次函数的欧拉定理，

$$\vec{x} \cdot \nabla V = nV$$

利用位力定理得

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \vec{x} \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} \right\rangle = \frac{n}{2} \langle V \rangle$$

对谐振子势， $n = 2$ ， $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ 。

对万有引力或库仑力， $n = -1$ ， $\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$ 。

**例** 一个星云由大量质点组成，

$$V = - \sum_{i \neq j} \frac{Gm^2}{r_{ij}} \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle \Rightarrow 2\langle T \rangle + \langle V \rangle = 0$$

如果当前  $2T + V = 0$ ，说明星云处于稳定状态。

如果当前测得  $2T + V > 0$ ，位力定理告诉我们在长时间之后  $2\langle T \rangle + \langle V \rangle \rightarrow 0$ ， $2T + V$  的值会趋于下降。由于机械能守恒， $T + V$  不变，所以只能是动能减少，势能增加，星云会膨胀。

反之，若测得当前  $2T + V < 0$ ，星云会收缩。



例 对质点在引力场中的运动，取平面极坐标系，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r}$$

如果套用位力定理，

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle r \frac{\partial L}{\partial r} + \theta \frac{\partial L}{\partial \theta} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle - \frac{1}{2} \langle mr^2\dot{\theta}^2 \rangle$$

但这并不正确——与在直角坐标系的计算结果相比，最后一项是多余的。

当质点绕原点转动时，角度 $\theta$ 作为广义坐标，是时间的连续函数，会取到 $2\pi, 4\pi, \dots$ 这样的数值， $\theta$ 无界，这是我们得到错误结论的原因。

在应用位力定理之前，需先确认在整个运动过程中，广义坐标和广义动量有界。

例 考虑容器中的理想气体，气体分子当作质点，分子之间没有相互作用。

设容器壁受到的压强为 $P$ ，则动能 $K$ 的平均值为

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle$$

只有容器壁处的分子受到作用力，

$$\text{R. H. S.} = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle = -\frac{1}{2} \oint_{\partial D} \vec{x} \cdot (-P\vec{n}) dS = \frac{1}{2} P \oint_{\partial D} \vec{x} \cdot d\vec{S}$$

$\partial D$ 表示容器内部区域 $D$ 的表面。

利用高斯散度定理，

$$\oint_{\partial D} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \nabla \cdot \vec{E} dV, \quad \oint_{\partial D} \vec{x} \cdot d\vec{S} = 3V$$

上式可以化简为

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} PV$$

这里 $V$ 是容器的体积。

最后利用分子动能 $K$ 与绝对温度 $T$ 的关系，

$$\langle K \rangle = N \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow PV = N k_B T$$

即理想气体状态方程

$$PV = nRT$$

其中 $n$ 是分子的摩尔数， $k_B$ 是玻尔兹曼常数， $R$ 是克拉伯龙常数。

**例** 设星云中含有 $N$ 个质量同为 $m$ 的星体。星云的总动能是

$$K = \frac{1}{2} N m \overline{v^2}$$

星云的引力势能为

$$V = - \sum_{i \neq j} \frac{G m^2}{r_{ij}} = - \frac{G m^2 N(N-1)}{2} \overline{r^{-1}}, \quad r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$$

其中记

$$\overline{v^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$$

是星体速度平方的平均值，

$$\overline{r^{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N(N-1)/2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{r_{ij}}$$

是星体之间的平均倒数距离。

作为万有引力系统，星云的势能是坐标的 $(-1)$ 次函数，

$$V(\lambda \vec{x}_1, \lambda \vec{x}_2, \dots, \lambda \vec{x}_N) = \lambda^{-1} V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$$

代入位力定理得

$$\langle K \rangle = - \frac{1}{2} \left\langle \vec{x}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i} \right\rangle = - \frac{1}{2} \langle V \rangle$$

限于人类的寿命，我们并不能测量星云动能和势能的长时间平均值 $\langle K \rangle$ 和 $\langle V \rangle$ 。利用统计物理中的热化假设——“长时间平均”等于“系综平均”（或者说相空间平均），

$$\langle r_{ij}^{-1} \rangle = \overline{r^{-1}}, \quad \langle v^2 \rangle = \overline{v^2}$$

利用位力定理我们推得

$$N \frac{1}{2} m \overline{v^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left[ -\frac{Gm^2 N(N-1)}{2} \overline{r^{-1}} \right] = \frac{1}{4} Gm^2 N(N-1) \overline{r^{-1}}$$

只要测得 $\overline{v^2}$ 和 $\overline{r^{-1}}$ ，就可以估算星系的**位力质量**，

$$M = Nm \approx (N-1)m = \frac{2\overline{v^2}}{G\overline{r^{-1}}}$$

实际计算时，需要考虑星云中的质量分布修正。

瑞士天文学家 Zwicky 在 1933 年利用位力定理估算了 Coma 星系团（球状、稳定分布）的总质量，发现星系团中绝大部分物质不发光，揭示了暗物质的存在<sup>10</sup>。



（图源：NASA）后发星系团（Coma Cluster）中可能充满暗物质

## 九、耗散系统

### 1. RAYLEIGH 耗散函数

一般来说，摩擦力在拉格朗日力学中必须作为主动力处理。

考虑正比于速度摩擦力（例如粘滞阻尼力、尾流阻尼力和阻尼器的阻力），

$$F^R = -\mu \dot{x} \xrightarrow{\text{多维、各向异性}} F_\alpha^R = -\mu_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta$$

可以用一个二次函数 $R(\dot{q})$ 描述，

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

<sup>10</sup> Zwicky F., Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln [J]. Helvetica Physica Acta, 1933(6): 110-127.

$$F_{\alpha}^R = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = -\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_{\beta}$$

称 $R$ 为**瑞利耗散函数**，其中耗散系数 $\mu_{\alpha\beta}$ 构成对称、正定的矩阵。

摩擦力做的功是

$$dW^R = F_{\alpha}^R dq_{\alpha} = -\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_{\beta}dq_{\alpha} = -\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_{\beta}\dot{q}_{\alpha}dt = -2Rdt \leq 0$$

$$\frac{dW^R}{dt} = -2R$$

这样的非保守力，功率不大于零，称之为**耗散力**。

## 2. 有 RAYLEIGH 耗散时的 LAGRANGE 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = Q_{\alpha}^{\text{nc}} - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$$

其中 $Q_{\alpha}^{\text{nc}}$ 是不包括耗散力的非保守力。

当除了耗散力 $F_{\alpha}^R$ 之外，没有其它非保守力时，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$$

## 3. 功能原理

拉氏函数不显含时间，则

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \dot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} + \ddot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \dot{q}_{\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) + \ddot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) + \dot{q}_{\alpha}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\right) + 2R\end{aligned}$$

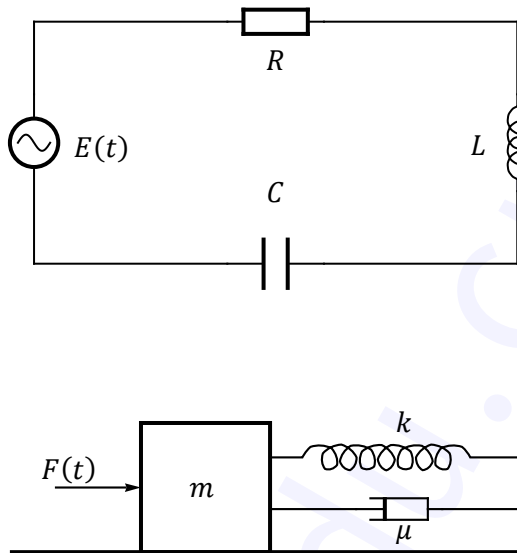
因此

$$\frac{dH}{dt} = -2R = \frac{dW^R}{dt}$$

# 十、 电路作为拉格朗日系统

## 1. 一个简单电路和力学系统

对比下上图的 RLC 电路和力学系统。



由欧姆定律，电流和电荷满足的电路方程是

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{e}{C} = E(t), \quad i \stackrel{\text{def}}{=} \dot{e}$$

而力学系统的运动方程则是

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F(t)$$

其中 $x(t)$ 是滑块的坐标。两个方程中的物理量之间存在对应关系，

$$L \leftrightarrow M, \quad e(t) \rightarrow x(t)$$

$$R \leftrightarrow \mu, \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow k, \quad E(t) \leftrightarrow F(t)$$

## 2. RLC 电路与力学系统等价

任意 RLC 电路与力学系统对比，物理量和运动方程都存在对应关系，如下表所示。

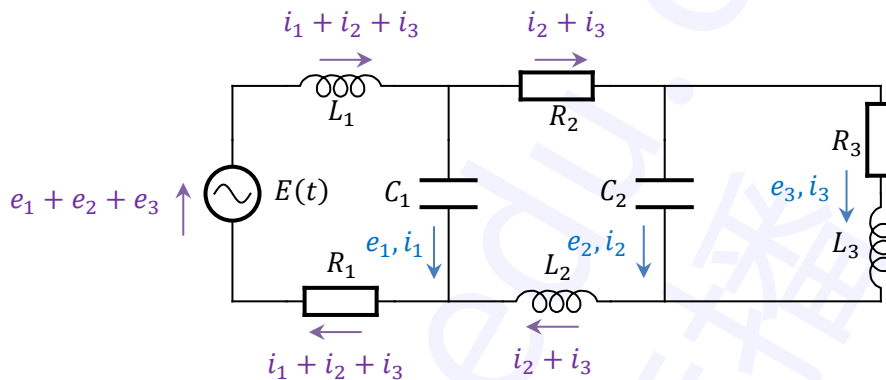
| 力学                                                            | 电路理论                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 广义坐标 $q_\alpha$                                               | 电荷 $Q_\alpha$                                                                                                         |
| 广义速度 $\dot{q}_\alpha$                                         | 电流 $i_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dQ_\alpha}{dt}$                                                           |
| 动能 $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 = T_2 + T_1 + T_0$ | $\frac{1}{2} \sum_\alpha L_\alpha i_\alpha^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} M_{\alpha\beta} i_\alpha i_\beta$ |
| 势能 $V$                                                        | $\frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{1}{C_\alpha} Q_\alpha^2$                                                               |
| 广义力 $Q_\alpha$                                                | 电动势 $E_\alpha$                                                                                                        |
| 耗散函数 $R$                                                      | $G = \frac{1}{2} \sum_\alpha R_\alpha i_\alpha^2$                                                                     |

表格 1 力学和电路的对应关系

按照上表的对应关系，写出电路的拉氏函数和耗散函数，就可以得到电路的拉格朗日方程即电路方程。

### 3. 例题

例 考虑如下的滤波电路：



解：

①取定广义坐标，如图所示。

②用基尔霍夫电流定律确定每个元件的电流或电荷。

③拉格朗日函数

电源为广义力，势能为

$$-E(t)(e_1 + e_2 + e_3)$$

所以

$$L = \left\{ \frac{1}{2} L_1 (i_1 + i_2 + i_3)^2 + \frac{1}{2} L_2 (i_2 + i_3)^2 + \frac{1}{2} L_3 i_3^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2C_1} e_1^2 + \frac{1}{2C_2} e_2^2 - E(t)(e_1 + e_2 + e_3) \right\}$$

瑞利耗散函数

$$G = \frac{1}{2} R_1 (i_1 + i_2 + i_3)^2 + \frac{1}{2} R_2 (i_2 + i_3)^2 + \frac{1}{2} R_3 i_3^2$$

④写方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial e_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial i_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

$$\begin{cases} L_1(\ddot{e}_1 + \ddot{e}_2 + \ddot{e}_3) + R_1(\dot{e}_1 + \dot{e}_2 + \dot{e}_3) + \frac{1}{C_1}e_1 & = E(t) \\ L_1(\ddot{e}_1 + \ddot{e}_2 + \ddot{e}_3) + L_2(\ddot{e}_2 + \ddot{e}_3) + R_1(\dot{e}_1 + \dot{e}_2 + \dot{e}_3) + R_2(\dot{e}_2 + \dot{e}_3) + \frac{1}{C_2}e_2 & = E(t) \\ L_1(\ddot{e}_1 + \ddot{e}_2 + \ddot{e}_3) + L_2(\ddot{e}_2 + \ddot{e}_3) + L_3\ddot{e}_3 + R_1(\dot{e}_1 + \dot{e}_2 + \dot{e}_3) + R_2(\dot{e}_2 + \dot{e}_3) + R_3\dot{e}_3 & = E(t) \end{cases}$$

## 附录 1 外代数

- (1) 叉乘表示为外积  
两个矢量的叉乘

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

表示以矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的有向面积，对两个矢量交换反对称，可以表示成“外积”，

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = a^i b^j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \stackrel{\text{def}}{=} a^i b^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$$

反对称张量有重要的几何意义，为此数学家专门引进外积和外矢量的概念。

- (2) 反对称算子  
对 $m$ 个指标 $Z = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ ，定义反对称化算子

$$\hat{A}_m \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m!} \sum_{\hat{\sigma} \in S_m} \text{sng } \hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} \alpha$$

其中 $S_m$ 是集合 $Z$ 的所有元素置换，

$$\text{sng } \hat{\sigma} = \begin{cases} +1, & \hat{\sigma} \text{ 是奇置换;} \\ -1, & \hat{\sigma} \text{ 是偶置换.} \end{cases}$$

- (3) 外矢量  
高次外矢量可以递归定义。 $k$ 次外矢量

$$\xi = \xi^{i_1 i_2 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k}$$

与 $l$ 次外矢量

$$\eta = \eta^{j_1 j_2 \dots j_l} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_l}$$

的外积（exterior product, wedge, Hermann Grassmann）为

$$\xi \wedge \eta \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{i_1 i_2 \dots i_k} \eta^{j_1 j_2 \dots j_l} \frac{(k+l)!}{k! l!} \hat{A}_{k+l} \left( (\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k}) \otimes (\mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_l}) \right)$$

按此定义，我们先计算基矢的外积，

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$$

三个基矢的外积为

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \wedge \mathbf{e}_k &= \frac{3!}{2! 1!} \hat{A}_3 \left( (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_k \right) = \frac{3!}{2! 1!} 2! \hat{A}_3 \left( (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_k \right) = 3! \hat{A}_3 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \\ &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

$$(e_i \wedge e_j) \wedge e_k = e_i \wedge (e_j \wedge e_k)$$

满足**结合律**，可记作 $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ 。

一般地，

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \stackrel{\text{def}}{=} k! \hat{A}_k e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_k} = \sum_{\hat{\sigma} \in S_k} \text{sng } \hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_k} = \delta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{j_1 j_2 \cdots j_k} e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_k}$$

其中广义 Kronecker 符号为

$$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k} = \begin{cases} +1, & (j_1, j_2, \cdots, j_k) \text{ 是 } (i_1, i_2, \cdots, i_k) \text{ 的偶排列;} \\ -1, & (j_1, j_2, \cdots, j_k) \text{ 是 } (i_1, i_2, \cdots, i_k) \text{ 的奇排列;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

满足性质<sup>11</sup>（ $n$ 是线性空间的维数）

$$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_{kl}}^{i_1 i_2 \cdots i_{kl}} \equiv (n - k) \delta_{j_1 j_2 \cdots j_k}^{i_1 i_2 \cdots i_k}$$

$$\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n}^{i_1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}$$

(4) 性质

外积满足（证明略）

❶ 分配律：

$$(\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta$$

❷ 交换律：

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi$$

❸ 结合律：

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta)$$

两个外矢量的外积为

$$\begin{aligned} \xi \wedge \eta &= (\xi^{i_1 i_2 \cdots i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \wedge (\eta^{i_{k+1} i_{k+2} \cdots i_{k+l}} e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k+l}}) \\ &= \xi^{i_1 i_2 \cdots i_k} \eta^{i_{k+1} i_{k+2} \cdots i_{k+l}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k+l}} \end{aligned}$$

<sup>11</sup>  $i_1, i_2, \cdots, i_k$  确定后， $l$  有  $n - k$  种取法。

由于反对称性，在三维空间中，外矢量最低为零次，最高为 3 次。

**例** 两个矢量的外积

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a^i b^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = a^i b^j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) = (a^i b^j - a^j b^i) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

三个矢量的外积

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = a^i b^j c^k \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = (a^i b^j c^k + a^j b^k c^i + a^k b^i c^j - a^i b^k c^j - a^j b^i c^k - a^k b^j c^i) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$$

(5) 应用：相关性判别<sup>12</sup>

**定理** 矢量  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  线性相关的充要条件是

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0$$

**证明** 若这组矢量线性相关，不妨设  $\omega_k$  是  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k-1}$  的线性组合，则必有

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge (\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \dots + \alpha_k \omega_k) = 0$$

反之，设这组矢量线性无关，则可以扩充成  $n$  维空间的完备基  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n\}$ ，由于

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n \neq 0$$

所以

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k \neq 0$$

---

<sup>12</sup> 也可以用消元法判别独立性和计算方程组的秩。

## 附录 2 微分形式

### (1) 1-形式

嘉当 (E. Cartan) 为了推广微分, 把  $dx^i$  看成是沿着自然基方向、长度为  $dx^i$  的矢量, 称为微分 1-形式。

矢量场可以表示 1-形式,

$$V_i dx^i$$

这里  $dx^i$  是 1-形式的基。

### (2) 2-形式

1-形式的外积为微分 2-形式 (differential 2-form),

$$dx^i \wedge dx^j$$

是 2-形式的一组基。

二阶反对称张量场可以表示为 2-形式,

$$\begin{aligned} T_{ij} e^i \otimes e^j &\rightarrow T_{ij} dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2!} (T_{ij} - T_{ji}) dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2!} T_{ij} (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i) \\ &= \frac{1}{2!} T_{jk} dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

### (3) $k$ 次形式

一个  $k$ 阶全反对称张量可以写成

$$T = \frac{1}{k!} T_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

在  $n$ 维流形上, 可以定义 0-形式 (标量), 1-形式, …… ,  $n$ -形式, 更高阶的微分形式为零。

### (4) 例

在三维流形直角坐标系, 两个 1-形式的外积

$$\begin{aligned} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \wedge (b_x dx + b_y dy + b_z dz) \\ = (a_x b_y - a_y b_x) dx \wedge dy + (a_y b_z - a_z b_y) dy \wedge dz + (a_z b_x - a_x b_z) dz \wedge dx \end{aligned}$$

实为两个矢量的叉乘。

三个 1-形式的外积,

$$\begin{aligned}
& (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \wedge (b_x dx + b_y dy + b_z dz) \wedge (c_x dx + c_y dy + c_z dz) \\
&= \{(a_x b_y - a_y b_x) c_z + (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y\} dx \wedge dy \wedge dz \\
&= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

是混合积。

### 附录 3 外微分

#### (1) 外微分

外微分  $d$  (exterior derivative, exterior differential) 把  $k$  次微分形式映射为  $k + 1$  次微分形式, 满足

❶ 0-形式  $f(x)$  的外微分即梯度,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

❷ 线性: 对任意两个微分形式  $\omega_1, \omega_2$  有

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

❸ 设  $\omega_1$  是  $r$  次外微分式, 则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$$

❹ 0-形式  $f(x)$  的 2 次外微分为零,

$$d(df) = 0 \Leftrightarrow d(dx^i) = 0$$

**注意:** 外微分的第四条性质, 与微积分中的二次微分定义完全不同。

微积分中的微分

$$d^2 f(x) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$$

一般不为零, 但是

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} d(dx^i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0$$

这个性质源自外积的反对称性。

**例** 矢量场可写成 1-形式,

$$A = A_i dx^i$$

它的外微分

$$dA = \partial_j A_i dx^j \wedge dx^i$$

在三维空间,

$$\partial_j A_i dx^j \wedge dx^i = (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx \wedge dy + (\partial_y A_z - \partial_z A_y) dy \wedge dz + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) dz \wedge dx$$

是矢量的旋度。

(2) 对偶

例 对微分 2-形式

$$F = \frac{1}{2!} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

求外微分，

$$dF = \frac{1}{2!} (dF_{ij}) \wedge (dx^i \wedge dx^j) = \frac{1}{2!} (\partial_k F_{ij} dx^k) \wedge (dx^i \wedge dx^j) = \frac{1}{2!} \partial_k F_{ij} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

在三维空间，

$$\frac{1}{2!} \partial_k F_{ij} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{2} (\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} - \partial_1 F_{32} - \partial_2 F_{13} - \partial_3 F_{21}) dx \wedge dy \wedge dz$$

利用张量的反对称性

$$F_{ij} = -F_{ji}$$

化简得

$$dF = (\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12}) dx \wedge dy \wedge dz$$

我们来看这有什么几何意义。由于

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2!} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} (F_{12} - F_{21}) dx \wedge dy + \frac{1}{2} (F_{23} - F_{32}) dy \wedge dz + \frac{1}{2} (F_{31} - F_{13}) dz \wedge dx \\ &= F_{12} dx \wedge dy + F_{23} dy \wedge dz + F_{31} dz \wedge dx \end{aligned}$$

定义星映射 (Hodge star operator)

$$B_i = (*F)_i \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{ijk} F_{jk}$$

为它的对偶 (F dual)

$$B_1 = \frac{1}{2!} (F_{23} - F_{32}), \quad B_2 = \frac{1}{2!} (F_{31} - F_{13}), \quad B_3 = \frac{1}{2!} (F_{12} - F_{21})$$

那么

$$\frac{1}{2!} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = B_1 dx \wedge dy + B_2 dy \wedge dz + B_3 dz \wedge dx$$

则

$$dF = \left( \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

是矢量场

$$B = B_i dx^i$$

的散度。

**例** 二维空间中的映射  $p(x, y), q(x, y)$ , 其外微分的外积

$$\begin{aligned} dp \wedge dq &= \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \wedge \left( \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial p}{\partial x} dx \wedge \frac{\partial q}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial y} dy \wedge \frac{\partial q}{\partial x} dx \\ &= \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx \wedge dy = \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} dx \wedge dy \end{aligned}$$

霍奇对偶 Hodge duality

$$\begin{aligned} (*\xi)_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k!} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_{n-k}} \xi_{j_1 j_2 \dots j_k} \\ **\xi &\equiv (\text{sgn det } g)(-1)^{k(n-k)} \xi \end{aligned}$$

三维空间

$$\begin{aligned} *(a \wedge b) &= a \times b, & *(a \times b) &= a \wedge b \\ *a \wedge b \wedge c &= (a \times b) \cdot c \end{aligned}$$

(3) 庞加莱引理

定理 (Poincaré)

$$d^2 = 0$$

即对任意微分形式  $\omega$ , 都有

$$d(d\omega) = 0$$

证明 设

$$\omega = f_{i_1 i_2 \dots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

则

$$d\omega = \frac{\partial f_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

$$d^2\omega = \frac{\partial^2 f_{i_1 i_2 \dots i_r}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

由于求偏导可交换，而微分形式的基是反对称的，

$$d^2\omega = 0$$

**推论** 三维空间中 0-形式满足

$$d^2f = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \nabla f = \vec{0}$$

1-形式满足

$$d^2A = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

(4) Stokes 公式

设  $D$  是  $m$  维定向流形  $M$  中的带边区域， $\omega$  是  $M$  上有紧致支集的  $m-1$  次外微分式，则

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

其中若  $\partial D = \emptyset$ ，则规定右边的积分为零。

高等数学中的 Stokes 定理和高斯散度定理是这个定理的特例。

## 附录 4 DIRAC $\delta$ -函数

英国物理学家狄拉克 (P.M. Dirac) 引入冲击函数, 以描述点电荷的电荷密度分布。冲击函数可以写成连续函数的极限,

$$\delta(x) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sigma}\right)^2}$$

它满足

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

冲击函数是偶函数,

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

下面是冲击函数的一些常用恒等式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a), \quad f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \{ \delta(x-a) + \delta(x+a) \}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk$$

## 附录 5 拉格朗日函数不确定性的证明

设有两个拉氏函数，

$$L = L(t, q, \dot{q}), \quad L' = L'(t, q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} L(t, q, \dot{q}) + f(t, q, \dot{q})$$

给出完全相同的拉氏方程，所以

$$\forall q(t), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0.$$

而

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \ddot{q}_\beta - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \\ &= \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \right\} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \ddot{q}_\beta \end{aligned}$$

括号中的项只依赖于  $t, q, \dot{q}$ ；含  $\ddot{q}$  的只有后面一项。对  $t = t_0$  时刻，可以构造函数  $q(t)$ ，使得  $q(t_0), \dot{q}(t_0)$  保持不变，但是  $\ddot{q}(t_0)$  却任意变化，因此等式成立的必要条件为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \equiv 0 \Rightarrow f(t, q, \dot{q}) = A(t, q) + \dot{q}_\alpha B_\alpha(t, q)$$

现在

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} - \dot{q}_\beta \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha} = \left\{ \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha} \right\} \dot{q}_\beta$$

括号中的项只依赖于  $t, q$ 。在选定的时刻  $t = t_0$ ，可以构造函数  $q(t)$ ，使得  $q(t_0)$  保持不变，而  $\dot{q}(t_0)$  却任意变化，所以等式成立的条件为

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha} = 0$$

这正好是

$$f(q, \dot{q}, t) dt = A(t, q) dt + B_\alpha(t, q) dq_\alpha$$

可积的条件

$$\frac{\partial A}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha}$$

于是

$$f(t, q, \dot{q}) = \frac{d\varphi(t, q)}{dt}.$$

反之，若

$$f(q, \dot{q}, t) = \frac{d\varphi(q, t)}{dt}$$

则很容易验证

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0$$

## 附录 6 齐次函数的欧拉定理

设有齐次函数 $V(\vec{x})$ ，满足

$$V(\lambda\vec{x}) \equiv \lambda^n V(\vec{x})$$

记 $\vec{x}' \triangleq \lambda\vec{x}$ ，对上式两边分别求导得

$$\text{L. H. S.} = \frac{\partial V(\lambda\vec{x})}{\partial \lambda} = \frac{\partial V(\vec{x}')}{\partial x'_i} x_i$$

$$\text{R. H. S.} = \frac{\partial \lambda^n V(\vec{x})}{\partial \lambda} = n\lambda^{n-1} V(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V(\vec{x}')}{\partial x'_i} x_i = n\lambda^{n-1} V(\vec{x})$$

最后令 $\lambda = 1$ ， $\vec{x}' = \vec{x}$ ，证得欧拉定理：

$$\vec{x} \cdot \nabla V = nV$$