

第一章 数学准备

张量代数起源于力学，最初用来表示弹性介质中各点的应力状态，现在张量理论已发展成为现代物理学中不可缺少的数学工具。

本章主要介绍笛卡尔张量，它是由欧几里德空间的矢量推广而得。由于欧氏空间的度规为单位矩阵，笛卡尔张量的协变分量和逆变分量相同，可以不区分张量的上、下指标。

一、 笛卡尔张量

1. 矢量和并矢

(1) 标准基

考虑三维欧几里德空间 $\mathbb{R}^3$ 的一组**标准基**（也称**规范基**） $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。标准基的模长为 1，并且不同的标准基互相**正交**，即满足等式

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

上式中的**克罗内克符号**（Kronecker symbol）定义是

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = j; \\ 0, & \text{如果 } i \neq j. \end{cases}$$

(2) 矢量的坐标

标准基是完备的，任意矢量 $\mathbf{x}$ 都可用标准基展开，

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \equiv x_i \mathbf{e}_i$$

这里我们采用了爱因斯坦**求和约定**（Einstein summation convention，又称为爱因斯坦标记 Einstein notation）：在相乘的项中，如果一个指标（字母）重复两次，默认对该指标的所有可能取值求和。例如

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_j b_k \delta_{jk}$$

被求和的指标又称为**哑指标**（dummy index），不求和的指标称为**自由指标**（free index）。如果表达式中的某项中存在重复指标，而这个指标又是自由指标，不需要求和，则必须在表达式后面备注该指标不求和。

利用基矢的完备性，任意矢量 $\mathbf{x}$ 可展开为标准基的线性组合，

$$\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}_j$$

利用标准基的正交归一性，展开系数是

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = x_j \delta_{ij} = x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

矢量在第*i*个坐标轴上的投影，即**坐标分量** x_i 。

我们常把坐标分量合并写成一个列矢量，

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(3) 直积和并矢

两个矢量的**并积**（用二元运算符表示 $\otimes$ ），也称为**直积**（direct product）或**张量积**（tensor product），称为**并矢**（dyadic），实际书写时，经常会省略直积符号写成

$$ab \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b, \quad a, b \in \mathbb{R}^3$$

约定直积运算满足

①**双线性**

$$(\lambda a) \otimes b = \lambda(a \otimes b)$$

$$a \otimes (\lambda b) = \lambda(a \otimes b)$$

②**分配律**

$$(a + b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c$$

$$a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c$$

并矢可以看成线性变换，只要定义并矢(ab)与矢量 x 的内积为

$$(ab) \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} a(b \cdot x)$$

$$x \cdot (ab) \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot a)b$$

直积的概念广泛应用于经典物理学和量子理论中。例如量子理论中的纠缠态

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$$

是直积态的线性叠加（线性叠加是**直和** direct sum $\oplus$ ）。

(4) 第二正交关系

把矢量的坐标代入展开式，

$$x = x_i e_i = (e_i \cdot x) e_i = e_i (e_i \cdot x) = e_i e_i \cdot x$$

所以标准基的完备性，可以表达为恒等式（第二正交关系）

$$e_i e_i = \mathbf{1}$$

这里的线性变换 $\mathbf{1}$ 表示**恒等变换**。

第二正交关系式左边的三项分别是

$$P_1 = e_1 e_1, \quad P_2 = e_2 e_2, \quad P_3 = e_3 e_3$$

这是三个投影算符，

$$x = x e_1 + y e_2 + z e_3 \in \mathbb{R}^3$$

$$P_1 \cdot x = x e_1, \quad P_2 \cdot x = y e_2, \quad P_3 \cdot x = z e_3$$

三个投影算符对应的矩阵是

$$(P_i)_{jk} = e_j \cdot P_i \cdot e_k$$

$$P_1 = \vec{e}_1 \vec{e}_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \vec{e}_2 \vec{e}_2^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \vec{e}_3 \vec{e}_3^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是第二正交关系的矩阵形式是

$$P_1 + P_2 + P_3 = \vec{e}_i \vec{e}_i^T = 1_{3 \times 3}$$

(5) 手征性

通常会选择标准基的顺序，使之成为**右手系**，

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

这等价于

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k &= \varepsilon_{ijk} \\ \varepsilon_{ijk} &= \det(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) \end{aligned}$$

上式可以作为**列维-奇维塔符号**（Levi-Civita symbol）的定义，或者等价定义为

$$\varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, & (i, j, k) \text{ 是偶排列;} \\ -1, & (i, j, k) \text{ 是奇排列;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

2. 矢量的坐标变换

(1) 转动矩阵

矢量 $\mathbf{x}$ 是一个客观量，与坐标架或基矢的选取无关；但其坐标分量却与基矢的选择有关。在新标准基 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 下，坐标分量发生了变化，

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_i = x'_i \mathbf{e}'_i$$

新坐标 x'_i 与老坐标 x_i 的关系是

$$x'_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i) = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) x_j$$

定义**转动矩阵**（rotation matrix）

$$R_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

又称**方向余弦矩阵**（direction cosine matrix）。

那么新老坐标分量的变换式为

$$x'_i = R_{ij} x_j \Leftrightarrow \vec{x}' = R \vec{x}$$

(2) 转动矩阵的正交性

两组标准基之间的转动矩阵是正交矩阵，

$$\begin{aligned}(R1_{3 \times 3}R^T)_{jk} &= R_{jl}R_{km}\delta_{lm} = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_l)(\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_m)\delta_{lm} = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_l)(\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_l) \\ &= (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_l)(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}'_k) = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_l \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}'_k = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}'_k = \delta_{jk} \\ RR^T &= 1_{3 \times 3}\end{aligned}$$

符号 $1_{3 \times 3}$ 表示 3×3 的单位矩阵。

(3) 转动矩阵的行列式

设新、老标准基都构成右手系，那么

$$(\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3 = 1$$

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= ((\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i) \times (\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j)) \cdot (\mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k) = (R_{1i} \mathbf{e}_i \times R_{2j} \mathbf{e}_j) \cdot R_{3k} \mathbf{e}_k \\ &= R_{1i} R_{2j} R_{3k} \varepsilon_{ijk} = \det R\end{aligned}$$

即

$$\det R = 1$$

(4) 转动群

三维空间的全部转动构成群（group，乘法满足封闭性、结合律、含幺、有逆），

$$SO(3) \triangleq \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | RR^T = 1_{3 \times 3}, \det R = 1\}$$

转动矩阵的逆矩阵仍为转动矩阵；两个转动矩阵的乘积也是转动矩阵。

(5) 转动公式

学习刚体力学和诺特定理时，需要用到转动矩阵的具体表达式，简单推导如下。

如图，绕轴 $\vec{n}$ 旋转 ψ 角，矢量 $\vec{x}$ 成为 $\vec{x}'$ ，

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{x}' = \overrightarrow{OB}$$

记矢量 $\vec{x}$ 和单位矢量 $\vec{n}$ 的夹角为 α 。

两条蓝色线均垂直于 $\vec{n}$ ，夹角为 ψ ，

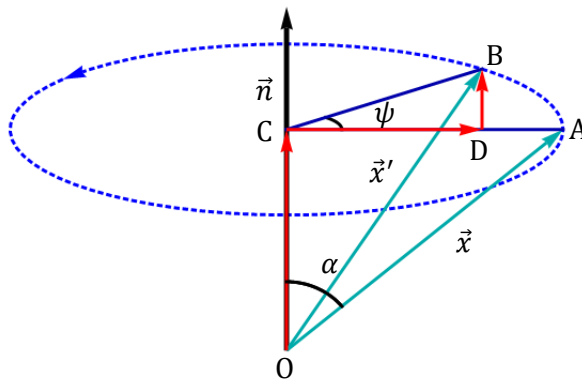
$$\overrightarrow{CA} \perp \vec{n}, \quad \overrightarrow{CB} \perp \vec{n}$$

从B点作CA的垂线，垂足是D。

矢量 $\vec{x}'$ 可以分解为三个矢量（红色线段）的叠加：

$$\vec{x}' = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} + |\vec{x}| \sin \alpha \cos \psi \frac{\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}}{|\vec{x}| \sin \alpha} + |\vec{x}| \sin \alpha \sin \psi \frac{\vec{n} \times \vec{x}}{|\vec{x}| \sin \alpha}$$

化简后得到



$$\vec{x}' = (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} + [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}] \cos \psi + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \psi$$

上式称为转动公式或罗德里格斯公式 (Rodrigues formula)。

定义矢量参数

$$\vec{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \psi \vec{n}$$

称为**角位移**或罗德里格斯参数。

对于无穷小的转动,

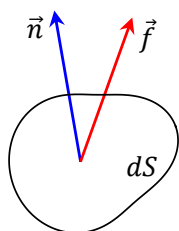
$$\vec{\psi} = \epsilon \vec{n} \rightarrow \vec{0}$$

保留到领头项 (线性项), 变换关系是

$$\vec{x}' = \vec{x} + \epsilon \vec{n} \times \vec{x}$$

3. 张量的定义

(1) 应力张量



考虑连续介质内部的一个有向面积元

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

$\vec{n}$ 是面积元的法向量, dS 是面积元的面积大小。

单位面积上所受的应力 $\vec{f}$ 来自分子间作用力, 与面元的方向有关, 准确到领头项 (忽略方向 $\vec{n}$ 的非线性项, 因为它们是高阶小量; 零次项不符合牛顿第三定律), 可以表示为**柯西应力公式**

$$\vec{f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是线性变换, 所以可以展开成

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$$

称 $\boldsymbol{\sigma}$ 为**柯西应力张量** (Cauchy's stress tensor)。其中 9 个并矢

$$\{\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k | j, k = 1, 2, 3.\}$$

是二阶张量的**张量基**。

柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是物理量, 与基矢的选取无关 (转动不变); **张量的分量** (components)

$$\{\sigma_{jk} | j, k = 1, 2, 3.\}$$

与标准基的选择有关, 可以写成 3×3 的矩阵

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

把柯西应力公式写成分量形式,

$$f_j \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \cdot n_l \mathbf{e}_l = \sigma_{jk} n_l \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \sigma_{jk} n_l \delta_{kl} \mathbf{e}_j = \sigma_{jk} n_k \mathbf{e}_j$$

即

$$f_j = \sigma_{jk} n_k$$

写成矩阵表达式,

$$\vec{f} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n}$$

一般的 2 阶张量 $\mathbf{T}$ 定义为

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

有时我们也直接称分量 T_{ij} 为张量。

(2) 并矢是二阶张量

三维空间中两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的并矢

$$\mathbf{ab} = (a_i \mathbf{e}_i) \otimes (b_j \mathbf{e}_j) = (a_i b_j) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

是一种二阶张量，它的分量是

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_i b_j$$

如果按字典顺序排列指标 (i, j) ，即 9 个基矢 $\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j | i, j \in \{1, 2, 3\}\}$ 的顺序是

$$\{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3\}$$

那么列矢量的直积为

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 \vec{b} \\ a_2 \vec{b} \\ a_3 \vec{b} \end{pmatrix} = (a_1 b_1, a_1 b_2, a_1 b_3, a_2 b_1, a_2 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1, a_3 b_2, a_3 b_3)^T$$

而两个 3×3 矩阵的直积则是

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B} \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{B} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{23} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{23} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{33} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{33} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{13}\mathbf{B}_{33} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{23} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{23} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{33} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{33} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{23}\mathbf{B}_{33} \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{23} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{23} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{33} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{33} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{31} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{32} & \mathbf{A}_{33}\mathbf{B}_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

容易验证等式

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\vec{x} \otimes \vec{y}) = (\mathbf{A}\vec{x}) \otimes (\mathbf{B}\vec{y})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$$

这是把线性变换的直积写成了矩阵形式，

$$(\mathbf{Ax}) \otimes (\mathbf{By}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$$

9 维空间中的指标 (i, j) 哪个算作第一个分量，哪个是第二分量，并没有实际意义，可以任意选择。用两个指标 (i, j) 来代表并矢 $\mathbf{x}' \otimes \mathbf{y}'$ 的分量，另外两个指标 (k, l) 代表并矢 $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ 的分量，那么线性变换 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 对应矩阵 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ，其第 (i, j) 行、第 (k, l) 元素是

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{(i,j),(k,l)} = A_{ik} B_{jl}$$

类似地定义 3 阶张量

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} T_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$$

以及更高阶的张量。高阶张量的分量，无法写成矩阵的形式。

矢量只有一个指标，是一阶张量。标量可以看成零阶张量。

(3) 张量物理量

在电磁学中，各向异性介质的介电张量是

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$
$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$$

其它的例子有刚体力学中的转动惯量（2 阶），描述晶体压电效应的压电张量（3 阶），弹性力学中的弹性张量（4 阶），广义相对论中的黎曼曲率张量（4 阶）等。

4. 张量的坐标变换

在坐标变换时，张量的每一个指标都按照矢量的方式变换，例如二阶张量

$$T'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'_i \cdot T_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}'_j = T_{kl} (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_l) = T_{kl} R_{ik} R_{jl} = R_{ii'} R_{jj'} T_{i'j'}$$

在有些资料中，直接以满足上式作为二阶张量的定义。

注意在坐标变换时，张量的分量 T_{ij} 会改变，但是张量 $\mathbf{T}$ 本身与坐标架的选择无关，是不变的。

5. 张量的运算

(1) 加法

以二阶 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 为例，同阶张量的加法定义为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

其中

$$\mathbf{C} = C_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad C_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} + B_{ij}$$

(2) 数乘

n 阶张量 $\mathbf{A}$ 与数 λ 相乘，叫做数乘。

数乘是对称的，

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \lambda$$

$\lambda \mathbf{A}$ 仍为的分量 n 阶张量，分量是

$$(\lambda \mathbf{A})_{i_1 i_2, \dots, i_n} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda A_{i_1 i_2, \dots, i_n}$$

全体张量在加法和数乘下构成线性空间。

(3) 直积

张量的直积又称并积、张量积，例如

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} = T_{ij} S_{kl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$$
$$P_{ijkl} = T_{ij} S_{kl}$$

在全体张量构成的线性空间上，定义直积运算，我们得到了一个**线性代数**，称之为**张量代数**。

(4) 缩并

缩并运算是矢量内积的推广。

对张量的两个指标求和得到低阶张量，例如

$$P_{ijkk}, \quad P_{iikl}, \quad P_{ijk i}$$

每缩并一对指标，张量的阶下降 2。

注意不同指标的缩并，其结果是不一样的，例如

$$T_{ij}S_{jk} \neq T_{ji}S_{jk}$$

例 三阶张量 A_{jkl} 与矢量 v_i 的“内积”有三种，

$$A_{jkl}v_j, \quad A_{jkl}v_k, \quad A_{jkl}v_l$$

其中第一、第三种分别是 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ 的分量；如果不写分量指标，要表达第二种缩并不太方便。

6. 张量的宇称

(1) 矢量和赝矢

在空间反射下坐标和动量满足

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x}$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p}' = m \frac{d\vec{x}'}{dt} = -m \frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{p}$$

是正常的矢量。

而角动量则满足

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L}' = \vec{x}' \times \vec{p}' = (-\vec{x}) \times (-\vec{p}) = +\vec{L}$$

与正常的矢量相差一个负号，称为**赝矢量**（pseudo-vector）。

(2) 张量的宇称

一个 n -阶张量，如果在空间反射下变成原来的张量乘以 $(-1)^n$ ，仍称之为**张量**（或者称为真张量 true tensor）；如果变成原张量的 $(-1)^{n+1}$ 倍，则称之为**赝张量**（pseudo tensor）。因子 ± 1 （空间反射的特征值）称为张量的**宇称**（parity）。

定义克罗内克张量为

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

它满足

$$\delta \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

是单位变换，因此

$$\delta = 1$$

通常称为**单位张量** (unit tensor)。

单位张量的分量 δ_{ij} 的取值, 按克罗内克符号定义取值, 不会随着空间反射或转动改变。所以单位张量在空间反射下不变, 是真张量。

定义**排列张量**为

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$$

张量分量的取值约定为列维-奇维塔符号 ε_{ijk} , 不随空间反射或转动改变。排列张量 ε 在空间反射下不变, 因而是三阶赝张量。

7. 迷向张量

(1) 基本迷向张量

各分量均转动不变的张量称为**迷向张量** (各向同性张量 isotropic tensor)。

转动矩阵满足

$$\begin{aligned} R_{jj'} R_{kk'} \delta_{j'k'} &= \delta_{jk} \\ R_{jj'} R_{kk'} R_{ll'} \varepsilon_{j'k'l'} &= \varepsilon_{jkl} \end{aligned}$$

这来自转动矩阵满足的两个条件:

$$RR^T = R^T R = \mathbf{1}_{3 \times 3}, \quad \det R = 1.$$

可见克罗内克张量 δ_{ij} 和列维-奇维塔张量 ε_{ijk} 是转动不变的, 称之为**基本迷向张量**。

基本迷向张量与张量缩并, 可以得到标量或赝标量, 即转动不变量。

(2) 与迷向张量有关的恒等式

① 三阶方阵的行列式

$$A_{ii'} A_{jj'} A_{kk'} \varepsilon_{ijk} = \det A \varepsilon_{i'j'k'}$$

证明:

$$\begin{aligned} A_{ii'} A_{jj'} A_{kk'} \varepsilon_{ijk} &= \det A \varepsilon_{i'j'k'} \\ \Leftrightarrow A_{ii'} A_{jj'} A_{kk'} \varepsilon_{ijk} B_{1i'} B_{2j'} B_{3k'} &= \det A \varepsilon_{i'j'k'} B_{1i'} B_{2j'} B_{3k'} \\ \Leftrightarrow \det(BA^T) &= \det A \det B \end{aligned}$$

② 两个全对称张量的乘积

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{i'j'k'} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ii'} & \delta_{ij'} & \delta_{ik'} \\ \delta_{ji'} & \delta_{jj'} & \delta_{jk'} \\ \delta_{ki'} & \delta_{kj'} & \delta_{kk'} \end{pmatrix}$$

上式的一个特例是

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

记住这一公式, 可以很容易地得到一系列场论公式, 在电动力学中有很多应用。

证明:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i'j'k'} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{ii'} & \delta_{ij'} & \delta_{ik'} \\ \delta_{ji'} & \delta_{jj'} & \delta_{jk'} \\ \delta_{ki'} & \delta_{kj'} & \delta_{kk'} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i'j'k'} A_{1i} A_{2j} A_{3k} B_{1i'} B_{2j'} B_{3k'} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{ii'} & \delta_{ij'} & \delta_{ik'} \\ \delta_{ji'} & \delta_{jj'} & \delta_{jk'} \\ \delta_{ki'} & \delta_{kj'} & \delta_{kk'} \end{pmatrix} A_{1i} A_{2j} A_{3k} B_{1i'} B_{2j'} B_{3k'} \\ \Leftrightarrow \det A \det B &= \det \begin{pmatrix} (AB^T)_{11} & (AB^T)_{12} & (AB^T)_{13} \\ (AB^T)_{21} & (AB^T)_{22} & (AB^T)_{23} \\ (AB^T)_{31} & (AB^T)_{32} & (AB^T)_{33} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

③恒等式

$$\delta_{ij}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + \delta_{il}\varepsilon_{kjm} + \delta_{im}\varepsilon_{klj}$$

证明：三维空间的不共面矢量 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 完备，任意矢量 $\vec{x}$ 都可以展开为

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{a} + \xi_2 \vec{b} + \xi_3 \vec{c}$$

为了求出展开系数 ξ_1 ，可以在上式两边同点乘矢量 $\vec{b} \times \vec{c}$ ，

$$\vec{x} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \xi_1 \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\det(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = \xi_1 \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$\xi_1 = \frac{\det(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

同样可得¹

$$\xi_2 = \frac{\det(\vec{a}, \vec{x}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}, \quad \xi_3 = \frac{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

代回展开式，

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{x} = \det(\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) \vec{a} + \det(\vec{a}, \vec{x}, \vec{c}) \vec{b} + \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) \vec{c}$$

上式对于 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 不共面的情形也成立。

写成分量形式

$$x_j \delta_{ij} a_k b_l c_m \varepsilon_{klm} = x_j \delta_{ik} a_k b_l c_m \varepsilon_{jlm} + x_j \delta_{il} a_k b_l c_m \varepsilon_{kjm} + x_j \delta_{im} a_k b_l c_m \varepsilon_{klj}$$

由于 $\{x_j, a_k, b_l, c_m\}$ 可以任意选择，可在等式两边同时消去，得恒等式。

(3) 场论公式的张量写法

矢量的内积可以表示为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$

两个矢量的叉乘是

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_j b_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i$$

梯度、散度和旋度分别是

¹ 在固体物理学中，矢量

$$\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}, \quad \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}, \quad \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

称为倒晶格矢 (reciprocal lattice vector)。

$$\nabla f(\vec{x}) = (\partial_i f)_i \mathbf{e}_i, \quad \partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \partial_i a_i$$

$$\nabla \times \vec{a} = (\nabla \times \vec{a})_i \mathbf{e}_i, \quad (\nabla \times \vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k$$

利用迷向张量的恒等式，可以化简场论表达式，而无需记忆很多个场论公式。

例 恒等式

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{pmatrix}$$

证明：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} &= \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \\ \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} a_j b_k c_l d_m &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 计算 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\nabla \times \left(\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x}\right)$, 其中 $\vec{B}$ 是常矢量。

解：利用前面的恒等式化简，

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = a_j b_l c_j - a_j b_j c_i \end{aligned}$$

所以

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

化简第二个式子得

$$\begin{aligned} \left[\nabla \times \left(\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \right) \right]_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\vec{B} \times \vec{x})_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} B_l x_m = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} B_l \partial_j x_m \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} B_l \delta_{jm} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klj} B_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klj} B_l = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jl}) B_l \\ &= \frac{1}{2} (3\delta_{il} - \delta_{il}) B_l = B_i \end{aligned}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x} \right) = \vec{B}$$

这说明均匀磁场 $\vec{B}$ 的矢量势是

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{x}$$

矢量势满足

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

二、几种常用的坐标系

选择合适的坐标系，会使物理问题的求解变得简单。下面介绍几种在力学问题中常用的正交坐标系，同时也为引进曲线坐标系和黎曼张量作准备。

1. 直角坐标系

(1) 坐标架

⌘ 标准基：记为 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ 或者 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

⌘ 度规张量 (metric tensor, 或者度规矩阵)：定义为基矢的内积，

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

基矢 $\mathbf{e}_i$ 在 $\mathbf{e}_j$ 轴的坐标分量记成

$$(\vec{e}_i)_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

三个列矢量合并为一个 3×3 矩阵，

$$(\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⌘ 完备性 (第二正交关系)： $\delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{1} \Rightarrow \vec{e}_i \vec{e}_i^T = \mathbf{1}_{3 \times 3}$

⌘ 右手性： $\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk}$

⌘ 体积元： $dV = dx dy dz$

(2) 物理量

⌘ 质点的位移： $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

⌘ 速度： $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$

⌘ 加速度： $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

⌘ 角动量：

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{cases}$$

⌘ 动能： $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

2. 平面极坐标系

(1) 坐标架

常用于天体运动、电磁、核力等有心力场问题。

⌘ 坐标参数：\$(r, \theta)\$ 与直角坐标的关系是

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

⌘ 基矢：取自然基为

$$\mathbf{e}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}$$

为了方便使用，通常我们会把自然基归一化，得标准基

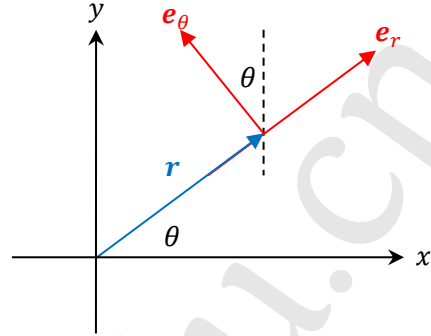


图 1 平面极坐标系的标准基

$$\mathbf{e}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}$$

标准基在直角坐标系的坐标分量是

$$(\vec{e}_r)_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial r}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases}$$

平面极坐标系与直角坐标系不同，它是一种“本地坐标系”，在空间各点处具有不同的坐标架。

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta), \quad \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$$

⌘ 度规矩阵：

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

标准基正交归一，所以度规为单位矩阵。

⌘ 第二正交关系：

$$\vec{e}_r \vec{e}_r^T = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta \vec{e}_\theta^T = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r \vec{e}_r^T + \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta^T = 1_{2 \times 2}$$

⌘ 面积元：

$$dS = \left| \det \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right) \right| dr d\theta = r dr d\theta$$

(2) 物理量

⌘ 位移：\$\vec{x} = r \vec{e}_r\$

⌘ 速度：

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{x} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \dot{\theta}$$

由极坐标标准基的表达式，得

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta \\ d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta \end{cases}$$

于是

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

上式中的两项分别为径向速度和角速度。

⌘ 加速度：

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \{ \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

⌘ 角动量：

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta &= \vec{e}_z \\ \vec{L} &= \vec{x} \times m \vec{v} \end{aligned}$$

平面运动时，角动量只有一个分量，

$$L_z = r m v_\theta - 0 = m r^2 \dot{\theta}$$

⌘ 动能：

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

3. 柱坐标系

(1) 坐标架

⌘ 坐标参数：与平面极坐标类似，但是多一个z-分量，

$$\vec{x}(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \vec{e}_x + \rho \sin \theta \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

⌘ 标准基：

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\theta &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y, \\ \vec{e}_z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = \vec{e}_z. \end{aligned}$$

这样定义的基矢正交归一（原因是坐标网格线正交）

⌘ 第二正交关系： $\vec{e}_\rho \vec{e}_\rho^T + \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta^T + \vec{e}_z \vec{e}_z^T = \mathbf{1}_{3 \times 3}$

⌘ 右手性：

$$(\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

⌘ 体积元：

$$dV = \left| \det \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} \right) \right| d\rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz$$

(2) 物理量

- ⌘ 位移: $\vec{x} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$
- ⌘ 速度: $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$
- ⌘ 加速度: $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$
- ⌘ 角动量:

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ m\dot{\rho} & m\rho\dot{\theta} & m\dot{z} \end{pmatrix} = -m\rho z \dot{\theta} \vec{e}_\rho + m(z\dot{\rho} - \rho\dot{z}) \vec{e}_\theta + m\rho^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

- ⌘ 动能:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

4. 球坐标系

(1) 坐标架

- ⌘ 坐标参数: 选为半径、纬度和经度 (r, θ, φ) , 与直角坐标的关系是

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

- ⌘ 标准基:

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} / \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right| = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$$

满足正交归一以及完备性。

- ⌘ 右手系:

$$(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_\varphi = \det(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) = +1$$

- ⌘ 体积元:

$$dV = \left| \det \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} \right) \right| dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

(2) 物理量

- ⌘ 位移: $\vec{x} = r \vec{e}_r$

- ⌘ 速度:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\dot{\theta} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} \right) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

⌘ 加速度：

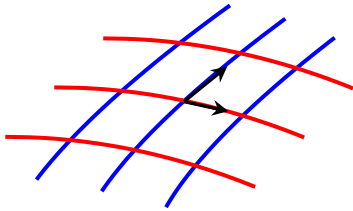
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_\theta + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) \vec{e}_\phi$$

⌘ 角动量： $\mathbf{L} = -mr^2 \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta + mr^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi$

⌘ 动能： $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$

三、黎曼几何简介

1. 黎曼空间的坐标架



为

考虑弯曲空间（ n 维流形）中的一个点，点的坐标参数

$$\{\xi^\alpha | \alpha = 1, 2, \dots, n\}$$

惠特尼嵌入定理： n 维流形一定可以嵌入 $N > n$ 维的高维欧几里德空间。

设流形中的点，在嵌入空间 $\mathbb{R}^N$ 中对应的矢量是

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$$

流形的**自然基**取为沿参数网格线的矢量，定义为

$$\mathbf{e}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

其中 $\mathbf{x}$ 是嵌入空间中的矢量。

自然基与时空点有关，

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(\xi)$$

每个点的附近都有一套不同的局部坐标架（标架场 vierbein）。

为了使用方便，我们在讨论一般的流形时，把基矢 $\mathbf{e}_\alpha$ 的指标写在右下角，而把坐标分量的指标写在左上角，于是一个矢量 $\mathbf{v}$ ，可以写成

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

若重新选取坐标参数为 $\{\xi'^\alpha | \alpha = 1, 2, \dots, n\}$ ，则标架场变为

$$\mathbf{e}'_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi'^\alpha}$$

由链式法则，

$$\mathbf{e}'_\alpha = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\alpha} \mathbf{e}_\beta$$

记坐标变换的雅可比矩阵及逆矩阵为

$$\Lambda^\alpha_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial \xi^\beta}, \quad \bar{\Lambda}^\beta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\alpha}$$

雅可比矩阵满足

$$\bar{\Lambda}_\gamma^\alpha \Lambda_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha, \quad \bar{\Lambda}_\alpha^\gamma \Lambda_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

那么自然基的坐标变换关系式为

$$\mathbf{e}'_\alpha = \bar{\Lambda}_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta$$

这里 δ_α^β 是 Kronecker 符号。

矢量物理量 $\mathbf{v}$ 是坐标变换的不变量，不依赖于坐标参数和标架场的人为选择（具有广义不变性）。可以推得，

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v^\alpha \mathbf{e}_\alpha = v'^\alpha \mathbf{e}'_\alpha \\ \mathbf{e}'_\alpha &= \bar{\Lambda}_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow v^\alpha \mathbf{e}_\alpha = v'^\alpha \bar{\Lambda}_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta \Rightarrow v^\beta = v'^\alpha \bar{\Lambda}_\alpha^\beta \Rightarrow v'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha v^\beta$$

即

基矢与坐标分量的变换矩阵互为逆矩阵。

2. 距离和度规张量

设黎曼空间中两个临近点的相对位移是

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi + d\xi) - \mathbf{x}(\xi) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha$$

注意到嵌入空间中， $d\mathbf{x}$ 是欧几里得空间的矢量，则两点之间的距离平方为

$$(ds)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

这是是 $d\xi^\alpha$ 正定二次型。

黎曼度规张量（metric tensor），又称度规矩阵，定义为

$$g_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$$

于是

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

例 对三维欧氏空间，如果使用笛卡尔坐标，度规矩阵及其逆矩阵都是单位矩阵

$$(\delta_{ij}) = (\delta^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相邻点的距离平方按勾股定理计算，

$$(ds)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

例 狭义相对论中的四维 Minkowski 空间（伪欧氏空间）度规为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

闵氏时空的坐标分量是

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

相邻时空点的间隔是

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 包含了黎曼空间 M 的所有内禀性质。

黎曼空间的度规矩阵是正定对称矩阵，并且非奇异，

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \quad \det g \neq 0$$

如果允许度规矩阵非正定，那么称这样的空间是伪黎曼空间。在广义相对论中，时空的度规存在异号的特征值，是伪黎曼空间。

记度规矩阵的逆矩阵为

$$(g^{\alpha\beta}) \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}$$

逆矩阵也是对称正定矩阵，

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$$

并且有

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$$

按度规的定义，可得

$$(g^{\alpha\beta} e_{\alpha} e_{\beta}) \cdot e_{\gamma} = g^{\alpha\beta} e_{\alpha} g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha} e_{\alpha} = e_{\gamma}$$

再由 e_{γ} 的任意性，我们得到了自然基的完备关系：

$$g^{\alpha\beta} e_{\alpha} e_{\beta} = 1$$

3. 协变和逆变

度规张量的坐标变换关系是

$$g'_{\alpha\beta} = e'_{\alpha} \cdot e'_{\beta} = \bar{\Lambda}_{\alpha}^{\mu} \bar{\Lambda}_{\beta}^{\nu} e_{\mu} \cdot e_{\nu} = \bar{\Lambda}_{\alpha}^{\mu} \bar{\Lambda}_{\beta}^{\nu} g_{\mu\nu}$$

$g_{\alpha\beta}$ 的两个下指标均按基矢的方式变换，称为二阶**协变张量** (covariant tensor)。

利用

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$$

可得

$$g'^{\alpha\beta} \bar{\Lambda}_{\beta}^{\mu} \bar{\Lambda}_{\gamma}^{\nu} g_{\mu\nu} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \Rightarrow (g'^{-1}) \bar{\Lambda}^T g \bar{\Lambda} = I \Rightarrow g'^{-1} = \Lambda (g^{-1}) \Lambda^T$$

即度规矩阵的逆矩阵满足

$$g'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} g^{\mu\nu}$$

$g^{\alpha\beta}$ 的两个上指标，均按坐标的方式变换，称为二阶**逆变张量**。

Sylvester 惯性定理 对称矩阵正、负、零特征值的个数，在合同变换下不变。

故参数变换不改变度规矩阵正、负、零特征值的个数。

选择合适的参数，可以使得度规在空间的任一个点处成为对角矩阵，且对角元取 ± 1 。

前面已知，矢量的分量在参数变换下作逆变换，

$$v'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} v^{\beta}$$

称 v^{α} 为**逆变矢量** (contravariant vector)。

将矢量的坐标与度规张量缩并，定义

$$v_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} v^\beta$$

则在坐标变换下

$$v'_\alpha = g'_{\alpha\beta} v'^\beta = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha \bar{\Lambda}^\nu_\beta g_{\mu\nu} \Lambda^\beta_\gamma v^\gamma = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha \left(\bar{\Lambda}^\nu_\beta \Lambda^\beta_\gamma \right) g_{\mu\nu} v^\gamma = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha \delta^\nu_\gamma g_{\mu\nu} v^\gamma = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha g_{\mu\nu} v^\nu = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha v_\mu$$

称 v_α 是**协变矢量**。

反之，也可以利用逆度规矩阵对协变矢量 u_α 升指标，

$$u^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} u_\beta$$

在坐标变换下，

$$u'^\alpha = g'^{\alpha\beta} u'_\beta = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g^{\mu\nu} \bar{\Lambda}^\gamma_\beta u_\gamma = \Lambda^\alpha_\mu \delta^\gamma_\nu g^{\mu\nu} u_\gamma = \Lambda^\alpha_\mu u^\mu$$

u^α 是**逆变矢量**。

我们可以利用度规张量来升降张量的指标，例如

$$T^{\cdot\beta\gamma}_\alpha = g_{\alpha\mu} T^{\mu\beta\gamma}$$

$$T^{\beta\cdot\gamma}_\alpha = g_{\alpha\mu} T^{\beta\mu\gamma}$$

其中“ $\cdot$ ”是指标占位符，用以显示第几个指标被升降，

$$T^{\cdot\beta\gamma}_\alpha \neq T^{\beta\cdot\gamma}_\alpha$$

上指标称为**逆变指标**，下指标称为**协变指标**。上下指标都有的张量，称为**混合张量**。

欧氏空间的直角坐标系中，度规是单位矩阵，所以笛卡尔张量无需考虑上下指标的区别。

例 基矢的完备性

$$g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{1}$$

这里上指标的基矢定义为

$$\mathbf{e}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta$$

基矢的内积是

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

可见 $\mathbf{e}^\alpha$ 是 $\mathbf{e}_\alpha$ 的对偶矢量（dual vector）。

例 Kronecker 符号是复合张量，

$$\Lambda^\alpha_\mu \bar{\Lambda}^\nu_\beta \delta^\mu_\nu = \Lambda^\alpha_\mu \bar{\Lambda}^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

4. 张量密度*

Levi-Civita 符号在坐标变换时，

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} &\rightarrow \varepsilon'_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \equiv \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \\ \bar{\Lambda}^{\beta_1}_{\alpha_1} \bar{\Lambda}^{\beta_2}_{\alpha_2} \dots \bar{\Lambda}^{\beta_n}_{\alpha_n} \varepsilon_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} &= (\det \Lambda)^{-1} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon'_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = (\det \Lambda)^{+1} \bar{\Lambda}^{\beta_1}_{\alpha_1} \bar{\Lambda}^{\beta_2}_{\alpha_2} \dots \bar{\Lambda}^{\beta_n}_{\alpha_n} \varepsilon_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}$$

$$\varepsilon'^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = (\det \Lambda)^{-1} \Lambda_{\beta_1}^{\alpha_1} \Lambda_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots \Lambda_{\beta_n}^{\alpha_n} \varepsilon^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}$$

当

$$\det \Lambda \neq 1$$

时，不符合张量的定义，相差雅可比行列式 $(\det \Lambda)^w$ ，称为**张量密度**。 w 称为张量密度的**权重**。

度规矩阵的行列式

$$\det g = \det(g_{\mu\nu})$$

也不是标量，

$$g'_{\mu\nu} = \bar{\Lambda}_\mu^\alpha \bar{\Lambda}_\nu^\beta g_{\alpha\beta}$$

$$g' = \bar{\Lambda}^T g \bar{\Lambda}$$

$$\det g' = (\det \Lambda)^{-2} \det g$$

是权重为 (-2) 的张量密度。

因此在黎曼几何中，广义协变的 **Levi-Civita 张量**应该定义为

$$\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\det g} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

两个矢量的叉乘

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} u^{\alpha_1} v^{\alpha_2} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \mathbf{e}^{\alpha_3} \mathbf{e}^{\alpha_4} \dots \mathbf{e}^{\alpha_n} = \sqrt{\det g} u^{\alpha_1} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \mathbf{e}^{\alpha_3} \mathbf{e}^{\alpha_4} \dots \mathbf{e}^{\alpha_n}$$

体积元

$$d\xi'^1 d\xi'^2 \dots d\xi'^N = \det \Lambda d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n$$

权重为 1，故标量体积元定义为

$$\sqrt{\det g} d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n$$

有向面积

$$\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} d\xi^{\alpha_1} d\xi^{\alpha_2} = \sqrt{\det g} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} d\xi^{\alpha_1} d\xi^{\alpha_2}$$

5. 协变导数*

(1) 联络

矢量场 $\mathbf{v}$ 在两个点的差是坐标参数变换的不变量，

$$d\mathbf{v} = d(v^\beta \mathbf{e}_\beta) = \{(\partial_\alpha v^\beta) \mathbf{e}_\beta + v^\beta (\partial_\beta \mathbf{e}_\alpha)\} d\xi^\alpha$$

利用投影算符

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = \mathbf{e}^\lambda \mathbf{e}_\lambda$$

从嵌入的欧几里得空间投影到流形的切空间，

$$d\mathbf{v} = d\xi^\beta \{(\partial_\beta v^\alpha) \mathbf{e}_\alpha + v^\alpha (\partial_\beta \mathbf{e}_\alpha) \cdot \mathbf{e}^\lambda \mathbf{e}_\lambda + v^\alpha (\partial_\beta \mathbf{e}_\alpha) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{e}^\lambda \mathbf{e}_\lambda)\}$$

定义 Christoffel 联络

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}) \cdot \mathbf{e}^{\lambda}$$

以及

$$H^{\sigma}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}) \cdot \mathbf{e}^{\perp\sigma}$$

其中 $\mathbf{e}^{\perp}_{\sigma}$ 是正交补空间的基矢,

$$\mathbf{e}^{\perp}_{\sigma} = (\mathbf{1} - \mathbf{e}^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda}) \cdot \mathbf{e}^{\perp}_{\sigma}$$

则

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta} &= \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}\mathbf{e}_{\lambda} + H^{\sigma}_{\alpha\beta}\mathbf{e}^{\perp}_{\sigma} \\ d\mathbf{v} &= \{(\partial_{\alpha}v^{\beta})\mathbf{e}_{\beta} + v^{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}\mathbf{e}_{\lambda} + v^{\beta}H^{\sigma}_{\alpha\beta}\mathbf{e}^{\perp}_{\sigma}\}d\xi^{\alpha} \end{aligned}$$

Christoffel 联络的两个下标是对称的,

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} &= (\partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}) \cdot \mathbf{e}^{\lambda} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^{\alpha} \partial \xi^{\beta}} \cdot \mathbf{e}^{\lambda} \\ \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} &= \Gamma^{\lambda}_{\cdot\beta\alpha} \end{aligned}$$

(2) 协变导数

如果

$$H^{\sigma}_{\alpha\beta} = 0$$

那么

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta} &= \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}\mathbf{e}_{\lambda} \\ d\mathbf{v} &= \{(\partial_{\alpha}v^{\beta}) + v^{\lambda}\Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}\}\mathbf{e}_{\beta}d\xi^{\alpha} \end{aligned}$$

可见 $\partial_{\alpha}v^{\beta}$ 与 $\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}$ 都不是张量, 但这时

$$\partial_{\alpha}v^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}v^{\lambda}$$

是张量。因此定义协变导数

$$\nabla_{\alpha}v^{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} v^{\beta}_{;\alpha} = \partial_{\alpha}v^{\beta} + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}v^{\lambda}$$

有

$$\nabla_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta} = 0$$

$$\nabla_{\alpha}v_{\beta} \equiv v_{\beta;\alpha} = \partial_{\alpha}v_{\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}v_{\lambda}$$

对二阶张量可得

$$\nabla_{\alpha}T^{\beta\gamma} \equiv \partial_{\alpha}T^{\beta\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda}T^{\lambda\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\cdot\alpha\lambda}T^{\beta\lambda}$$

零阶张量 f 的协变导数

$$\nabla_{\alpha}f \equiv \partial_{\alpha}f$$

(3) 联络的表达式

记

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^{\lambda}_{\cdot\beta\gamma}g_{\lambda\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_{\alpha} \cdot (\partial_{\beta}\mathbf{e}_{\gamma})$$

可得

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \partial_\alpha (\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\gamma) \\ \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \textcircled{1} \\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \textcircled{2} \\ \partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} \textcircled{3}\end{aligned}$$

② + ③ - ①, 得

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (-\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha}) \\ \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

例 曲线坐标系的牛顿方程

使用广义坐标表示质点的位移,

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1(t), q^2(t), \dots, q^n(t))$$

则自然基为

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_i$$

度规为

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial r^j}{\partial q^\beta} \delta_{ij}$$

质点的速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr^i}{dt} \mathbf{e}_i = \dot{q}^\alpha \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_i = \dot{q}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

加速度为

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{q}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \ddot{q}^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \dot{q}^\alpha \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} = \ddot{q}^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta} = \ddot{q}^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\lambda \\ a^\mu &= \ddot{q}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta\end{aligned}$$

得运动方程

$$F^\mu = m (\ddot{q}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta)$$

如果是保守力,

$$\begin{aligned}V &= V(q) \\ F^\mu &= g^{\mu\nu} F_\nu = -g^{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial q^\nu} \\ m (\ddot{q}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) + g^{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial q^\nu} &= 0\end{aligned}$$

练习 $\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = ?$ $\nabla_\alpha A^\mu B^\nu = ?$ $\nabla_\alpha \mathbf{e}^\beta = ?$

6. 曲率张量*

(1) 黎曼曲率张量

计算得

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\mu = R_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\nu A^\nu$$

黎曼曲率张量为

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\nu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\nu + \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \Gamma_{\beta\mu}^\gamma - \Gamma_{\gamma\beta}^\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma$$
$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\nu\gamma} R_{\alpha\beta\mu}{}^\gamma$$

(2) 曲率张量的对称性

指标的交换对称性

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

Bianchi 第一恒等式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

Bianchi 第二恒等式

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu \nabla_\alpha R_{\beta\gamma\mu}{}^\nu + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha\mu}{}^\nu + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu = 0$$

Ricci 张量

$$R_{\beta\mu} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

曲率标量

$$R \stackrel{\text{def}}{=} g^{\beta\mu} R_{\beta\mu} = g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

(3) 例子

例 三维 Euclid 空间球坐标参数，

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

自然基对应的标架场

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

度规张量场

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det g} = r^2 \sin \theta$$

体积元

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

逆变度规张量

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

非零的导数项

$$\partial_1 g_{22} = 2r, \quad \partial_1 g_{33} = 2r \sin^2 \theta, \quad \partial_2 g_{33} = r^2 \sin 2\theta$$

联络的非零分量

$$\Gamma_{122} = -r, \quad \Gamma_{133} = -r \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{212} = r, \quad \Gamma_{221} = r, \quad \Gamma_{233} = -\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$$

$$\Gamma_{313} = r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{323} = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta, \quad \Gamma_{331} = r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{332} = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$$

黎曼曲率分量 $R_{ijkl} = 0$ 。

7. 梯度、散度和旋度*

标量场微分的意义是两个点处的数值差，不依赖于坐标架，

$$df \stackrel{\text{def}}{=} f(\xi + d\xi) - f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}^\alpha \cdot d\xi^\beta \mathbf{e}_\beta$$

所以梯度应该定义成

$$\nabla = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$$

矢量的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla_\alpha v^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha \sqrt{\det g} v^\alpha$$

Laplace 算符

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha \sqrt{\det g} \partial^\alpha f$$

矢量的旋度（三维空间）

$$\nabla \times \mathbf{v} = \epsilon^{ijk} (\nabla_i v_j) \mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{ijk} (\nabla_i v_j) \mathbf{e}_k$$

练习 计算

$$\frac{1}{\sqrt{\det g}} (\partial_\alpha \sqrt{\det g})$$

提示：利用行列式的微分公式

$$(\det A) \mathbf{1} = A \operatorname{adj}^T(A) = \operatorname{adj}(A) A^T \Rightarrow \\ d(\det A) = (\det A) \operatorname{tr}(A^{-1} dA)$$

