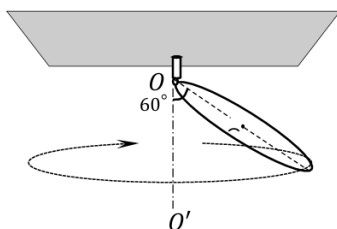


理论力学作业 32 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

7. 质量为 m 、半径为 a 的均质圆环上的一点由铰链固定在天花板上的 O 点。设 OO' 是向下的竖直垂线，圆环中心为 C 点。圆环运动时始终有 $\angle COO' = 60^\circ$ ，且圆环所处的平面始终与 $\angle COO'$ 所在的平面相垂直。



- (1) 求圆环定点转动的角速度；
- (2) 求圆环角动量的大小；
- (3) 求圆环所受 O 点的作用力。

Solution

(1)

由题知刚体以竖直轴 $\hat{z}$ 作匀速转动（进动），设角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \hat{z}, \quad \theta = 60^\circ$$

在刚体上取一组主轴：令 $\mathbf{e}_3 \parallel OC$ ，令 $\mathbf{e}_1$ 为圆环平面法向，并令 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ 。则根据欧拉运动学方程将角速度和欧拉角相联系：

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta.$$

下面求转动惯量，薄圆环在质心 C 处：

$$I_{C,\perp} = ma^2, \quad I_{C,\text{diam}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

Solution

又 $|OC| = a$ ，平行轴定理给出关于 O 的主转动惯量

$$I_1 = I_{C,\perp} + ma^2 = 2ma^2, \quad I_3 = I_{C,\text{diam}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

于是角动量

$$\mathbf{J} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3.$$

该系统所受力矩只由重力提供，重力对 O 的力矩为 $\boldsymbol{\tau} = \overrightarrow{OC} \times mg\hat{\mathbf{z}}$ ，其大小

$$\tau = mga \sin \theta.$$

由于刚体以 $\hat{\mathbf{z}}$ 匀速转动， $\mathbf{J}$ 亦绕 $\hat{\mathbf{z}}$ 匀速转动，因此

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}.$$

注意 $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J} \parallel \mathbf{e}_2$ ，大小为：

$$|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}| = \left| (\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_3) \times (I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3) \right| = \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta (I_1 - I_3).$$

由 $\tau = |\dot{\mathbf{J}}| = \dot{\phi} |\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}|$ 得

$$mga \sin \theta = \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta (I_1 - I_3) \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{mga}{(I_1 - I_3) \cos \theta}.$$

取 $\theta = 60^\circ$ ， $I_1 = 2ma^2$ ， $I_3 = \frac{1}{2}ma^2$ ，得

$$\dot{\phi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{g}{a}}$$

故角速度为：

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{g}{a}}$$

(2)

由 $\mathbf{J} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$ ，

$$|\mathbf{J}|^2 = (I_1\omega_1)^2 + (I_3\omega_3)^2.$$

代入 $\omega_1 = \dot{\phi} \sin 60^\circ$ ， $\omega_3 = \dot{\phi} \cos 60^\circ$ 及上问 $\dot{\phi}$ ，故圆环角动量大小为

$$|\mathbf{J}| = \frac{7}{2\sqrt{3}} ma^2 \sqrt{\frac{g}{a}}$$

(3)

质心 C 绕竖直轴作匀速圆周运动，其轨道半径 $r = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

Solution

故向心加速度大小

$$a_C = \dot{\phi}^2 r = \frac{2\sqrt{3}}{3}g.$$

质心牛顿方程 $m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}_O + mg\hat{\mathbf{z}}$ 。由于 $\mathbf{a}_C$ 水平，竖直方向有

$$F_{O,z} = mg \quad (\text{向上}).$$

水平方向有

$$|\mathbf{F}_{O,\perp}| = ma_C = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg \quad (\text{指向竖直轴}).$$

因此

$$|\mathbf{F}_O| = \sqrt{F_{O,z}^2 + |\mathbf{F}_{O,\perp}|^2} = \sqrt{m^2g^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}mg\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}mg$$

8. 质量为 m 的拉格朗日陀螺，即重力场中绕定点转动的对称重陀螺，三个主转动惯量为 $I_1 = I_2 \neq I_3$ ，质心到固定点的距离为 l 。

- (1) 选取三个欧拉角作为广义坐标，写出哈密顿函数 $H(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$;
- (2) 利用哈密顿-雅可比方程，求哈密顿主函数 $S(t, \phi, \theta, \psi)$ （可保留积分形式，无需求积）。

Solution

(1)

取欧拉角 (ϕ, θ, ψ) ，由讲义（拉格朗日陀螺）可写拉氏量

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta.$$

相应正则动量为

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta},$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}),$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3(\cos \theta \dot{\phi} + \dot{\psi}) \cos \theta$$

由此解出速度：

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I_1}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \cos \theta \dot{\phi}$$

Solution

由定义 $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$, 代入上式并化简得

$$H(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl \cos \theta$$

(2)

Hamilton-Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\phi, \theta, \psi, \frac{\partial S}{\partial \phi}, \frac{\partial S}{\partial \theta}, \frac{\partial S}{\partial \psi}\right) = 0$$

由于 H 不含 ϕ, ψ , 记 α, β, E 为积分常数 (对应 $p_\phi = \alpha, p_\psi = \beta$)

$$S(t, \phi, \theta, \psi) = -Et + \alpha \phi + \beta \psi + W(\theta)$$

代入受限 HJ 方程得

$$\frac{1}{2I_1} \left(\frac{dW}{d\theta} \right)^2 + \frac{(\alpha - \beta \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{\beta^2}{2I_3} + mgl \cos \theta = E$$

故

$$\frac{dW}{d\theta} = \pm \sqrt{2I_1 \left(E - \frac{\beta^2}{2I_3} - mgl \cos \theta \right) - \frac{(\alpha - \beta \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}$$

于是哈密顿主函数为

$$S(t, \phi, \theta, \psi) = -Et + \alpha \phi + \beta \psi \pm \int d\theta \sqrt{2I_1 \left(E - \frac{\beta^2}{2I_3} - mgl \cos \vartheta \right) - \frac{(\alpha - \beta \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}$$

9. 一个均匀圆锥体的密度为 ρ , 底部圆半径为 R , 高为 h 。

- (1) 求相对于圆锥顶点的主转动惯量 I_1, I_2, I_3 (其中 I_3 对应圆锥的对称轴);
- (2) 以圆锥顶点为固定点, 求该重对称陀螺的拉氏量及三个守恒量 (可以把 $I_1 = I_2 = I$ 和 I_3 当作已知常数, 无需把上题结果代入);
- (3) 重对称陀螺能够均匀进动 (章动角 θ 和进动角速度 $\dot{\phi}$ 保持不变)。以圆锥顶点为固定点, 求该重对称陀螺可以均匀进动的角速度 $\dot{\phi}$, 并给出存在均匀进动的条件 (表达式中保留 J_3 和章动角 θ)。

Solution

(1)

绕对称轴 z 的转动惯量 I_3 :

$$I_3 = \int_0^h \frac{1}{2} r^2 dm = \int_0^h \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{h^2} z^2 \right) \left(\rho \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz \right) = \frac{\rho \pi R^4}{2h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{\rho \pi R^4}{2h^4} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{\rho \pi R^4 h}{10}.$$

又圆锥总质量

$$m = \rho \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow \rho \pi h = \frac{3m}{R^2},$$

代入得

$$I_3 = \frac{3}{10} m R^2$$

过顶点且垂直对称轴的转动惯量 $I_1 = I_2$: 取 x 轴过顶点且垂直 z 轴, 对高度 z 处薄圆盘, 其关于通过圆盘中心、平行于 x 的直径轴的转动惯量为

$$dI_{x,\text{cm}} = \frac{1}{4} dm r^2$$

而顶点轴与该直径轴相距 z , 由平行轴定理

$$dI_1 = dI_{x,\text{cm}} + dm z^2 = \frac{1}{4} dm r^2 + dm z^2$$

因此

$$I_1 = \int_0^h \left(\frac{1}{4} r^2 dm + z^2 dm \right) = \int_0^h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{R^2}{h^2} z^2 \right) + z^2 \right] \left(\rho \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz \right).$$

化简为

$$I_1 = \rho \pi \int_0^h z^4 \left(\frac{R^4}{4h^4} + \frac{R^2}{h^2} \right) dz = \rho \pi \left(\frac{R^4}{4h^4} + \frac{R^2}{h^2} \right) \frac{h^5}{5} = \rho \pi \left(\frac{R^4 h}{20} + \frac{R^2 h^3}{5} \right).$$

仍用 $\rho \pi h = \frac{3m}{R^2}$, 得

$$I_1 = I_2 = \frac{3m}{R^2} \left(\frac{R^4}{20} + \frac{R^2 h^2}{5} \right) = \frac{3m}{20} (R^2 + 4h^2).$$

(2)

圆锥为重对称陀螺, 取欧拉角 (ϕ, θ, ψ) , 并记 $I_1 = I_2 = I$ 。则拉氏量可写为

$$L = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta$$

相应的正则动量

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta},$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = J_3 = \text{const}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta = J_z = \text{const}$$

由于 L 不显含 t , 能量守恒:

$$E = \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta = \text{const}$$

(3)

均匀进动定义为

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \text{const}.$$

由守恒量

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = J_3 = \text{const}, \quad p_\phi = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + J_3 \cos \theta = J_z = \text{const}.$$

故可解出

$$\dot{\phi} = \frac{J_z - J_3 \cos \theta}{I \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{J_3}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta.$$

代入能量守恒的表达式中, 得到等效势 $V_{eff}(\theta)$

$$E = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(J_z - J_3 \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta \equiv \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta)$$

故当 $E = \min V_{eff}(\theta)$ 时, $\dot{\theta} = 0$, 即均匀进动, 此时对应的 θ 使得 $\frac{dV_{eff}(\theta)}{d\theta} = 0$, 化简得

$$I \cos \theta \dot{\phi}^2 - J_3 \dot{\phi} + mgl = 0.$$

因此均匀进动角速度为

$$\dot{\phi} = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 4Imgl \cos \theta}}{2I \cos \theta}$$

存在均匀进动 (实数解) 的条件为

$$J_3^2 \geq 4Imgl \cos \theta$$