

理论力学作业 30 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

22. 船上放着一个摆钟，若在行程末重力加速度增大了 $1/1000$ ，则振幅改变多少？

Solution

这里利用朱老师讲义第 46 页的结论，单摆的绝热不变量为：

$$J_\theta = \frac{1}{2}mg^{\frac{1}{2}}l^{\frac{3}{2}}\theta_0^2$$

即单摆振幅 $\theta_0 \propto g^{-\frac{1}{4}}$ ，故

$$(g + \Delta g)^{-\frac{1}{4}} \approx g - \frac{1}{4}\Delta g = g(1 - \frac{1}{4}\frac{\Delta g}{g}) = g(1 - \frac{1}{4000})$$

所以振幅减小 $\frac{1}{4000}$

1.

- (1) 写出矩阵 $A = \vec{\psi} \cdot \vec{X}$ 的三个特征值。
- (2) 求矩阵函数 $f(A)$ 的三个特征值以及 $\det f(A)$ 。
- (3) 计算行列式

$$\det \left(\frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - 1}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \right)$$

Solution

(1)

$$A = \vec{\psi} \cdot \vec{X} = \psi \hat{n} \cdot \vec{X} = \psi \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda & \psi n_3 & -\psi n_2 \\ -\psi n_3 & \lambda & \psi n_1 \\ \psi n_2 & -\psi n_1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \psi^2 \lambda = 0$$

Solution

所以 A 的特征值为 $0, i\psi, -i\psi$

(2)

设 $f(A) = \sum_i c_i A^i$, 对 A 的特征值有 $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, 则

$$f(A)\vec{v} = \sum_i c_i A^i \vec{v} = \sum_i c_i \lambda^i \vec{v} = f(\lambda)\vec{v}$$

故 $f(A)$ 特征值为 $f(0), f(i\psi), f(-i\psi)$, $\det f(A) = f(0)f(i\psi)f(-i\psi)$

(3)

由第 (2) 问得:

$$\det \left(\frac{e^{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} - 1}{\vec{\psi} \cdot \vec{X}} \right) = 1 \cdot \left(\frac{e^{i\psi} - 1}{i\psi} \right) \cdot \left(\frac{e^{-i\psi} - 1}{-i\psi} \right) = \frac{4\sin^2 \frac{\psi}{2}}{\psi^2}$$

此题选做, 不计作业成绩。

2. 证明转动角 ψ 、转动轴和与转动矩阵 R 的关系式:

$$\psi = \arccos \left(\frac{\text{Tr } R - 1}{2} \right)$$

$$n_j = \frac{\text{Tr} (X_j (R^T - R))}{2\sqrt{3 + 2 \text{Tr } R - (\text{Tr } R)^2}}$$

Solution

根据 Rodrigues 公式,

$$R(\vec{\psi}) = 1 \cos \psi + \hat{n}\hat{n}^T(1 - \cos \psi) + X_n \sin \psi$$

又 $\text{Tr}(X_n) = 0, \text{Tr}(\hat{n}\hat{n}^T) = 1$, 故

$$\text{Tr}(R) = 3 \cos \psi + 1 - \cos \psi$$

得

$$\psi = \arccos \left(\frac{\text{Tr } R - 1}{2} \right)$$

由 Rodrigues 公式可得

$$R^T - R = -2 \sin \psi X_n$$

两边与 X_j 取迹:

$$\text{Tr}(X_j(R^T - R)) = -2 \sin \psi n_i \text{Tr}(X_j X_i).$$

Solution

利用生成元的正交关系

$$\text{Tr}(X_i X_j) = -2\delta_{ij},$$

得到

$$\text{Tr}(X_j(R^T - R)) = 4 \sin \psi n_j.$$

另一方面, 由前述结果

$$\cos \psi = \frac{\text{Tr} R - 1}{2},$$

有

$$\sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi = \frac{3 + 2\text{Tr} R - (\text{Tr} R)^2}{4}.$$

因此

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{3 + 2\text{Tr} R - (\text{Tr} R)^2}}{2}.$$

故

$$n_j = \frac{\text{Tr}(X_j(R^T - R))}{2\sqrt{3 + 2\text{Tr} R - (\text{Tr} R)^2}}$$

3. 绕轴

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T$$

逆时针旋转 $\xi = 45^\circ$ 的转动矩阵是

$$R = e^{\xi \vec{n} \cdot \vec{X}}$$

求 R 对应的欧拉角参数 (ϕ, θ, ψ) 。

Solution

由 Rodrigues 公式

$$R = \mathbf{1} + \sin \xi X_n + \hat{n} \hat{n}^T (1 - \cos \xi)$$

代入 $\sin \xi = \cos \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

采用 z - x - z 欧拉角分解

$$R = R_z(\phi) R_y(\theta) R_z(\psi).$$

Solution

由

$$\cos \theta = R_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

再由

$$R_{13} = \sin \phi \sin \theta, \quad R_{23} = -\cos \phi \sin \theta$$

得

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

最后由

$$R_{31} = \sin \theta \sin \psi, \quad R_{32} = \sin \theta \cos \psi$$

得

$$\psi = -\frac{\pi}{4}.$$

$$(\phi, \theta, \psi) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right)$$