

理论力学作业 28 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

16. 用可积条件判断

$$q = 2\sqrt{Q} \cos P, \quad p = \sqrt{Q} \sin P$$

是否为正则变换。

Solution

$$dq = -2\sqrt{Q} \sin P dP + \frac{1}{\sqrt{Q}} \cos P dQ$$

$$dp = \sqrt{Q} \cos P dP + \frac{1}{2\sqrt{Q}} \sin P dQ$$

$$dq \wedge dp = -\sin^2 P dP \wedge dQ + \cos^2 P dQ \wedge dP = dQ \wedge dP$$

故该变换为正则变换

17. 设

$$F_1 = \frac{1}{2} q_a q_a + \frac{1}{2} Q_a Q_a$$

这个生成函数能否给出正则变换？

Solution

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta} = 0$$

故该生成函数不为自由生成函数，即无法给出正则变换。

18. 根据母函数

$$F_2 = \frac{1}{2} q \sqrt{-2P - q^2} + P \arccos \frac{q}{\sqrt{-2P}}$$

(1) 写出正则变换 $Q(t, q, p), P(t, q, p)$ 。

(2) 这个正则变换是否存在第一类、第三类和第四类母函数？若存在，请写出来表达式。

Solution

1.

已知第二类母函数:

$$F_2(q, P) = \frac{1}{2}q\sqrt{-2P - q^2} + P \arccos \frac{q}{\sqrt{-2P}}.$$

由

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha},$$

得:

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{-2P - q^2} - \frac{q^2}{2\sqrt{-2P - q^2}} - P \frac{1}{\sqrt{-2P - q^2}} = \sqrt{-2P - q^2}$$

$$Q = \frac{1}{2}q \frac{-1}{\sqrt{-2P - q^2}} - P \frac{q(-2P)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{-2P}}} + \arccos \frac{q}{\sqrt{-2P}} = \arccos \frac{q}{\sqrt{-2P}}$$

反解得正则变换:

$$Q = \arccos \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}, \quad P = -\frac{1}{2}(q^2 + p^2).$$

2. 根据 $\frac{\partial Q}{\partial p}, \frac{\partial Q}{\partial q}, \frac{\partial P}{\partial q} \neq 0, \infty$, 因此存在第一三四类母函数。(下面计算生成函数时注意自变量的选取)

第一类:

$$F_1(q, Q) = F_2 - PQ = \frac{1}{2}qp - \frac{1}{2}(q^2 + p^2)\arccos \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}} - (-\frac{1}{2})(p^2 + q^2)\arccos \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}$$

$$= \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}q^2 \tan Q$$

第三类:

$$F_3(Q, p) = F - pq = -\frac{1}{2}pq = -\frac{1}{2}p^2 \cot Q$$

第四类:

$$F_4(p, P) = F - pq + PQ = -\frac{1}{2}p\sqrt{-2P - p^2} + P \arccos \sqrt{\frac{2P + p^2}{2P}}$$