

理论力学 A

作业 27 参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 12 月 28 日

第六章哈密顿力学

12. 单自由度系统的拉格朗日函数为

$$L(t, q, \dot{q}) = \dot{q}^2 \sin^2 t + q\dot{q} \sin 2t + q^2$$

其中 $\dot{q} \triangleq \frac{dq}{dt}$.

1. 求与 q 共轭的广义动量 p ，以及相应的哈密顿函数 $H(t, q, p)$ ；
2. 根据求得的哈密顿函数 $H(t, q, p)$ ，写出哈密顿方程；
3. 给出一个正则变换 $(q, p) \mapsto (Q, P)$ ，使得变换后的哈密顿量 K 守恒.

解答

(1) 广义动量定义为：

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2\dot{q} \sin^2 t + q \sin 2t = 2\dot{q} \sin^2 t + 2q \sin t \cos t$$

由上式反解广义速度 $\dot{q}$ ：

$$\dot{q} = \frac{p - 2q \sin t \cos t}{2 \sin^2 t} = \frac{p}{2 \sin^2 t} - q \cot t$$

哈密顿函数为勒让德变换 $H = p\dot{q} - L$. 为了简化计算，可以先整理拉格朗日函数：

$$L = (\dot{q} \sin t + q \cos t)^2 - q^2 \cos^2 t + q^2 = (\dot{q} \sin t + q \cos t)^2 + q^2 \sin^2 t$$

设中间变量 $u = \dot{q} \sin t + q \cos t$ ，则 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2u \sin t \implies u = \frac{p}{2 \sin t}$. 代入 L 的表达式：

$$L = u^2 + q^2 \sin^2 t = \frac{p^2}{4 \sin^2 t} + q^2 \sin^2 t$$

于是哈密顿函数为：

$$\begin{aligned}
 H &= p\dot{q} - L = p \left(\frac{u - q \cos t}{\sin t} \right) - \left(\frac{p^2}{4 \sin^2 t} + q^2 \sin^2 t \right) \\
 &= p \left(\frac{p}{2 \sin^2 t} - q \cot t \right) - \frac{p^2}{4 \sin^2 t} - q^2 \sin^2 t \\
 &= \frac{p^2}{2 \sin^2 t} - pq \cot t - \frac{p^2}{4 \sin^2 t} - q^2 \sin^2 t \\
 &= \frac{p^2}{4 \sin^2 t} - pq \cot t - q^2 \sin^2 t
 \end{aligned}$$

(2) 哈密顿正则方程为：

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2 \sin^2 t} - q \cot t \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -(-p \cot t - 2q \sin^2 t) = p \cot t + 2q \sin^2 t \end{cases}$$

(3) 提示考虑拉氏框架下的坐标变换. 观察 L 的形式, 含有 $(q \sin t)$ 项, 这暗示了新坐标的选择. 令 $Q = q \sin t$. 我们构造一个第二类生成函数 $F_2(q, P, t)$ 来产生此变换. 目标是让 $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = q \sin t$, 故取：

$$F_2(q, P, t) = qP \sin t$$

由此得到变换关系：

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} = P \sin t \implies P = \frac{p}{\sin t} \\
 Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} = q \sin t \implies q = \frac{Q}{\sin t}
 \end{aligned}$$

新的哈密顿量 K 为：

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H + qP \cos t$$

将旧变量 p, q 用新变量 P, Q 代换代入 H ：

$$\begin{aligned}
 H(Q, P, t) &= \frac{(P \sin t)^2}{4 \sin^2 t} - (P \sin t) \left(\frac{Q}{\sin t} \right) \cot t - \left(\frac{Q}{\sin t} \right)^2 \sin^2 t \\
 &= \frac{P^2}{4} - PQ \cot t - Q^2
 \end{aligned}$$

计算 K ：

$$\begin{aligned}
 K &= \left(\frac{P^2}{4} - PQ \cot t - Q^2 \right) + \left(\frac{Q}{\sin t} \right) P \cos t \\
 &= \frac{P^2}{4} - PQ \cot t - Q^2 + PQ \cot t \\
 &= \frac{P^2}{4} - Q^2
 \end{aligned}$$

由于 $K = \frac{P^2}{4} - Q^2$ 不显含时间 t , 故变换后的哈密顿量守恒. 所求正则变换为:

$$Q = q \sin t, \quad P = \frac{p}{\sin t}$$

13. 利用正则变换的辛条件, 分别判断相空间点变换是不是正则变换.

解答

变换形式为线性变换 $\mathbf{Z} = \mathbf{M}\mathbf{z}$, 其中 $\mathbf{z} = (q_1, q_2, p_1, p_2)^T$. 题目给出的变换矩阵是分块对角形式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 线性变换是正则变换的充要条件是辛条件 $\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}$ 成立,

对于这种分块对角形式, 条件简化为 $\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}$. 计算 $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 对于变换 $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$: 验证 $\mathbf{A}^T \mathbf{B}_1$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{I}$$

故**不是**正则变换.

(2) 对于变换 $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$: 验证 $\mathbf{A}^T \mathbf{B}_2$:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

故**是**正则变换.

14. 已知二维相空间点变换 $Q = aq^2 + bp^2$, $P = \arctan \frac{cp}{q}$ 是正则变换, 求 a, b .

解答

正则变换的充要条件是泊松括号 $\{Q, P\}_{q,p} = 1$.

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}$$

计算各偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} &= 2aq, & \frac{\partial Q}{\partial p} &= 2bp \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= \frac{1}{1 + (\frac{cp}{q})^2} \cdot \left(-\frac{cp}{q^2}\right) = \frac{-cp}{q^2 + c^2p^2} \\ \frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{1}{1 + (\frac{cp}{q})^2} \cdot \left(\frac{c}{q}\right) = \frac{cq}{q^2 + c^2p^2} \end{aligned}$$

代入泊松括号公式:

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= (2aq) \cdot \frac{cq}{q^2 + c^2p^2} - (2bp) \cdot \frac{-cp}{q^2 + c^2p^2} \\ &= \frac{2acq^2 + 2bcp^2}{q^2 + c^2p^2} \end{aligned}$$

令 $\{Q, P\} = 1$, 即:

$$\frac{2acq^2 + 2bcp^2}{q^2 + c^2p^2} = 1 \implies 2acq^2 + 2bcp^2 = q^2 + c^2p^2$$

比较 q^2 和 p^2 的系数, 得:

$$\begin{cases} 2ac = 1 \\ 2bc = c^2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2c} \\ b = \frac{c}{2} \end{cases}$$

15. 用泊松括号检验 $Q = q + t \cos p$, $P = p$ 是否为正则变换.

解答

计算基本泊松括号 $\{Q, P\}_{q,p}$:

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= (1)(1) - (-t \sin p)(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

因为 $\{Q, P\} = 1$, 所以该变换是正则变换.