

理论力学作业 26 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

10. 一个哈密顿系统的正则函数是

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + apx$$

利用泊松括号求级数解。

Solution

$$[x, H] = p + ax, \quad [p, H] = -x - ap.$$

$$[[x, H], H] = [p + ax, H] = (a^2 - 1)x,$$

$$[[p, H], H] = [-x - ap, H] = (a^2 - 1)p.$$

由此得递推关系：

$$\frac{d^{2n+1}x}{dt^{2n+1}} = (p + ax)(a^2 - 1)^n$$

$$\frac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (a^2 - 1)^n x$$

对 p 也同理。由泰勒展开：

$$x(t) = x_0 \left[1 + \frac{(a^2 - 1)t^2}{2!} + \frac{(a^2 - 1)^2 t^4}{4!} + \cdots \right] + (p_0 + ax_0) \left[t + \frac{(a^2 - 1)t^3}{3!} + \cdots \right].$$

$$p(t) = p_0 \left[1 + \frac{(a^2 - 1)t^2}{2!} + \frac{(a^2 - 1)^2 t^4}{4!} + \cdots \right] - (x_0 + ap_0) \left[t + \frac{(a^2 - 1)t^3}{3!} + \cdots \right].$$

即：

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \cos(t\sqrt{1-a^2}) + \frac{p_0 + ax_0}{\sqrt{1-a^2}} \sin(t\sqrt{1-a^2}), & a^2 < 1, \\ x_0 \cosh(t\sqrt{a^2-1}) + \frac{p_0 + ax_0}{\sqrt{a^2-1}} \sinh(t\sqrt{a^2-1}), & a^2 > 1. \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \cos(t\sqrt{1-a^2}) - \frac{x_0 + ap_0}{\sqrt{1-a^2}} \sin(t\sqrt{1-a^2}), & a^2 < 1, \\ p_0 \cosh(t\sqrt{a^2-1}) - \frac{x_0 + ap_0}{\sqrt{a^2-1}} \sinh(t\sqrt{a^2-1}), & a^2 > 1. \end{cases}$$

11. 计算

$$[L^2, L_k] = ? \quad [x_j, L_k] = ? \quad [p_j, L_k] = ? \quad [x^2, L_k] = ? \quad [p^2, L_k] = ? \quad [\vec{p} \cdot \vec{x}, L_k] = ?$$

Solution

1. $[L^2, L_k]$

角动量平方 L^2 与角动量分量 L_k 的泊松括号为：

$$[L^2, L_k] = \sum_{i=1}^3 [L_i^2, L_k] = (L_i [L_i, L_k] + [L_i, L_k] L_i).$$

下面证明角动量的泊松括号关系：

$$\begin{aligned} [L_i, L_k] &= [\varepsilon_{ijl} x_j P_l, \varepsilon_{kmn} x_m P_n] \\ &= \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{kmn} [x_j P_l, x_m P_n] \\ &= \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{kmn} (P_l x_m \delta_{jn} - x_j P_n \delta_{ml}) \\ &= (\delta_{ik} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{kl}) P_l x_m + (\delta_{ik} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{kj}) x_j P_n \\ &= x_i P_k - x_k P_i \\ &= \varepsilon_{ikm} L_m \end{aligned}$$

得：

$$[L^2, L_k] = (L_i \varepsilon_{ikm} L_m + \varepsilon_{ikm} L_m L_i) = 2\varepsilon_{ikm} L_i L_m = 0$$

最后一个等号是因为 ε_{ikm} 对指标 i 和 m 反对称，而 $L_i L_m$ 对称。

2. $[x_j, L_k]$

$$[x_j, L_k] = \varepsilon_{kmn} [x_j, x_m p_n] = \varepsilon_{kmn} x_m \delta_{jn} = \varepsilon_{jkm} x_m.$$

3. $[p_j, L_k]$

类似地：

$$[p_j, L_k] = \varepsilon_{kmn} [p_j, x_m p_n] = \varepsilon_{kmn} (-\delta_{jm}) p_n = -\varepsilon_{kjm} p_n = \varepsilon_{jkm} p_n$$

4. $[x^2, L_k]$

$$[x^2, L_k] = \sum_i [x_i^2, L_k] = 2x_i [x_i, L_k] = 2x_i \varepsilon_{ikm} x_m = 0$$

5. $[p^2, L_k]$

类似地：

$$[p^2, L_k] = \sum_i [p_i^2, L_k] = 2p_i [p_i, L_k] = 2p_i \varepsilon_{ikm} p_m = 0.$$

Solution

6. $[\vec{p} \cdot \vec{x}, L_k]$

$$[\vec{p} \cdot \vec{x}, L_k] = [p_i x_i, L_k] = (p_i [x_i, L_k] + x_i [p_i, L_k]) .$$

代入前结果:

$$[\vec{p} \cdot \vec{x}, L_k] = (p_i \varepsilon_{ikm} x_m + x_i \varepsilon_{ikm} p_m) = \varepsilon_{ikm} (p_i x_m + x_i p_m) = 0$$