

理论力学 A

作业 25 参考答案

学期： 2025 秋

助教： 于洪飞，张积翔

日期： 2025 年 12 月 24 日

第六章哈密顿力学

8. 自由落体运动的哈密顿函数为

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 - mgx.$$

当 k 取何值时，无穷小变换

$$\Delta t = 0, \Delta x = \epsilon kp, \Delta p = \epsilon$$

是相空间的准对称变换？写出诺特守恒量.

解答

相空间中的无穷小变换 $\Delta x = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p}, \Delta p = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial x}$ 由生成元 G 生成. 根据题目给出的变换：

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p} &= kp \implies G = \frac{1}{2}kp^2 + f(x) \\ -\frac{\partial G}{\partial x} &= 1 \implies f(x) = -x + C \end{aligned}$$

忽略常数 C ，生成元为 $G = \frac{1}{2}kp^2 - x$.

要使该变换为准对称变换（即生成诺特守恒量），生成元 G 必须是运动常数，即满足泊松括号 $\{G, H\} = 0$ （或 $\frac{dG}{dt} = 0$ ）：

$$\begin{aligned} \{G, H\} &= \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= (-1) \left(\frac{p}{m} \right) - (kp)(-mg) \\ &= -\frac{p}{m} + kmgp \\ &= p \left(kmg - \frac{1}{m} \right) \end{aligned}$$

令 $\{G, H\} = 0$ ，解得：

$$kmg - \frac{1}{m} = 0 \implies k = \frac{1}{m^2g}$$

对应的诺特守恒量即为生成元 G :

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^2 g} \right) p^2 - x = \frac{p^2}{2m^2 g} - x$$

即 $\frac{p^2}{2m^2 g} - x = \text{Const.}$

9. 三维谐振子系统的哈密顿函数为

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k \mathbf{x}^2.$$

已知二次型力学量

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \triangleq \sum_{i,j=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} A_{ij} p_i p_j + \frac{1}{2} B_{ij} x_i x_j + C_{ij} x_i p_j \right\}$$

是守恒量, 即 $dG/dt = 0$, 其中系数矩阵 A, B, C 是常数, 且 A, B 是对称矩阵.

1. 利用泊松定理判断: 这三个系数矩阵必须满足什么条件?
2. 由上面的结论知, G 是一些基本守恒量的线性组合, 这些线性无关的基本守恒量有几个? 分别是哪些?

解答

(1) 计算 G 与 H 的泊松括号:

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} = \sum_l \left(\frac{\partial G}{\partial x_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial G}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial x_l} \right)$$

已知:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_l} &= \frac{p_l}{m}, & \frac{\partial H}{\partial x_l} &= k x_l \\ \frac{\partial G}{\partial x_l} &= \sum_j (B_{lj} x_j + C_{lj} p_j), & \frac{\partial G}{\partial p_l} &= \sum_j (A_{lj} p_j + C_{jl} x_j) \end{aligned}$$

代入泊松括号表达式:

$$\begin{aligned} \{G, H\} &= (\mathbf{x}^T B + \mathbf{p}^T C^T) \frac{\mathbf{p}}{m} - (\mathbf{p}^T A + \mathbf{x}^T C)(k \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{x}^T B \mathbf{p} + \frac{1}{m} \mathbf{p}^T C^T \mathbf{p} - k \mathbf{p}^T A \mathbf{x} - k \mathbf{x}^T C \mathbf{x} \end{aligned}$$

整理各项:

- $\mathbf{p}^T C^T \mathbf{p}$: 要使该项对任意 $\mathbf{p}$ 为 0, 矩阵 C^T 的对称部分必须为 0, 即 C 必须是反对称矩阵.

$$C_{ij} = -C_{ji}$$

此时该项与 $-k\mathbf{x}^T C \mathbf{x}$ 均自动为 0.

- 交叉项 $\frac{1}{m}\mathbf{x}^T B \mathbf{p} - k\mathbf{p}^T A \mathbf{x}$: 利用 $\mathbf{p}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{p} = \mathbf{x}^T A \mathbf{p}$ (A 对称), 上式变为:

$$\mathbf{x}^T \left(\frac{1}{m}B - kA \right) \mathbf{p}$$

要使该式对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ 恒为 0, 需满足:

$$\frac{1}{m}B - kA = 0 \implies B = mkA$$

结论: 系数矩阵必须满足:

$$B_{ij} = kmA_{ij}, \quad C_{ij} = -C_{ji}$$

- (2) • 由 A_{ij} 确定的部分: A 是 3×3 对称矩阵, 有 6 个独立分量. 对应的守恒量为能量张量形式:

$$\frac{p_i p_j}{2m} + \frac{1}{2} k x_i x_j = \text{Const} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

- 由 C_{ij} 确定的部分: C 是 3×3 反对称矩阵, 有 3 个独立分量. 对应的守恒量为角动量形式:

$$x_i p_j - x_j p_i = \text{Const} \quad (i \neq j)$$

结论: 共有 9 个线性无关的基本守恒量 (其中 6 个是独立的). 它们分别是:

- (a) 6 个对称型守恒量 (广义能量张量): $\frac{p_i p_j}{2m} + \frac{1}{2} k x_i x_j$
 (b) 3 个反对称型守恒量 (角动量): $L_k = \epsilon_{ijk} x_i p_j$ (即 $x_i p_j - x_j p_i$)