

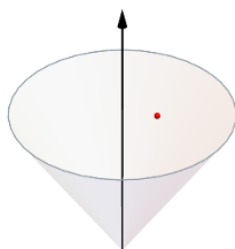
理论力学作业 24 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

以下两题，选做其一：

5. 一个质点在重力作用下沿光滑圆锥面内运动。锥面竖直放置，锥顶朝下，锥面的半顶角为 α 。以锥顶为原点，向上为 z -轴方向，记质点绕 z -轴的转角为 θ 。

- (1) 写出系统的哈密顿函数 $H(z, \theta, p_z, p_\theta)$ 以及哈密顿方程。
- (2) 利用劳斯变换消去拉氏函数中的循环坐标，写出等效拉氏量 L_{eff} 。
- (3) 利用求得的等效拉氏量写出拉氏方程。



Solution

1. 采用柱坐标 (r, θ, z) ：

$$r = z \tan \alpha$$

质点速度在柱坐标系中：

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

代入 $r = z \tan \alpha$, $\dot{r} = \dot{z} \tan \alpha$ ：

$$v^2 = \dot{z}^2 \tan^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2 \sec^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2$$

动能为：

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{z}^2 \sec^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2 \right)$$

势能（重力势能，原点在锥顶）：

$$V = mgz$$

Solution

拉格朗日函数:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left(\dot{z}^2 \sec^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}^2 \right) - mgz$$

广义动量:

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \sec^2 \alpha$$
$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}$$

哈密顿函数:

$$H = p_z \dot{z} + p_\theta \dot{\theta} - L$$

由广义动量反解得:

$$\dot{z} = \frac{p_z \cos^2 \alpha}{m}$$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m z^2 \tan^2 \alpha}$$

代入哈密顿函数:

$$H = \frac{p_z^2 \cos^2 \alpha}{m} + \frac{p_\theta^2}{m z^2 \tan^2 \alpha} - \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{p_z \cos^2 \alpha}{m} \right)^2 \sec^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \left(\frac{p_\theta}{m z^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 \right] + mgz$$
$$= \frac{p_z^2 \cos^2 \alpha}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m z^2 \tan^2 \alpha} + mgz$$

即:

$$H(z, \theta, p_z, p_\theta) = \frac{p_z^2 \cos^2 \alpha}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m z^2 \tan^2 \alpha} + mgz$$

哈密顿正则方程:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z \cos^2 \alpha}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m z^2 \tan^2 \alpha}$$
$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{p_\theta^2}{m z^3 \tan^2 \alpha} - mg, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

2. 拉格朗日函数中 θ 为循环坐标, $p_\theta = m z^2 \tan^2 \alpha \dot{\theta}$ 为守恒量, 记为常数 l :

$$p_\theta = l$$
$$\dot{\theta} = \frac{l}{m z^2 \tan^2 \alpha}$$

等效拉氏量 $L_{\text{eff}}(z, \dot{z}) = L(z, \dot{z}) - p_\theta \dot{\theta}$ 将 $\dot{\theta}$ 用 l 代入, 故:

$$L_{\text{eff}}(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m \left(\dot{z}^2 \sec^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \left(\frac{l}{m z^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 \right) - mgz - \frac{l^2}{m z^2 \tan^2 \alpha}$$

Solution

$$= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \sec^2 \alpha - \frac{l^2}{2mz^2 \tan^2 \alpha} - mgz$$

3. 对 L_{eff} 写 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial z} = 0$$

计算:

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \sec^2 \alpha$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{z} \sec^2 \alpha) = m\ddot{z} \sec^2 \alpha$$

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial z} = \frac{l^2}{mz^3 \tan^2 \alpha} - mg$$

代入得:

$$m\ddot{z} \sec^2 \alpha - \frac{l^2}{mz^3 \tan^2 \alpha} + mg = 0$$

6. 平面振子在直角坐标系的拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

取极坐标系 (r, θ) ,

- (1) 利用劳斯变换消去循环坐标, 求等效拉氏量 $L_{\text{eff}}(r, \dot{r})$ 。
- (2) 求径向运动的平衡位置 a 。
- (3) 求在平衡位置 $r = a$ 附近的微振动频率。
- (4) 与直角坐标系的振动频率对比, 两者是否相同?

Solution

1. 取极坐标系:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

速度分量:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta$$

平方和:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Solution

极坐标系下的拉氏函数:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2$$

广义动量:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

由于 L 不显含 θ , θ 是循环坐标, p_θ 守恒。设 $p_\theta = l$ (常数), 则:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

劳斯变换消去循环坐标 θ , 等效拉氏函数为:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}}(r, \dot{r}) &= L - p_\theta \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{l}{mr^2} \right)^2 \right) - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{l^2}{mr^2} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}kr^2 \end{aligned}$$

2. 对 L_{eff} 写 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial r} = 0$$

即:

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - kr$$

平衡位置由 $\ddot{r} = 0$ 给出:

$$\frac{l^2}{mr^3} - kr = 0$$

取正根 ($r > 0$):

$$a = \left(\frac{l^2}{mk} \right)^{1/4}$$

3. 在平衡位置 $r = a$ 附近作微振动 $r = a + \delta r$: 其中 δr 为小量。

代入运动方程 $m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - kr$, 得:

$$m\delta\ddot{r} = \frac{l^2}{m(a + \delta r)^3} - k(a + \delta r)$$

舍去高阶小量:

$$m\delta\ddot{r} = \frac{l^2}{ma^3} \left(1 - 3\frac{\delta r}{a} \right) - k(a + \delta r)$$

代入 $a = \left(\frac{l^2}{mk} \right)^{1/4}$ 得:

Solution

$$m\delta\ddot{r} = \frac{4k}{m}\delta r$$

微振动角频率：

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

4. 在直角坐标系中，运动方程为：

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + ky = 0$$

振动频率均为：

$$\omega_{x,y} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

极坐标系径向微振动频率是直角坐标系频率的 2 倍。因为直角坐标系下是两个独立的简谐振动，而半径 r 的运动表现为总运动，是这两个分运动合成。

7. 设快子在给定的电磁外场中运动，写出系统的哈密顿函数和正则方程。

Solution

电磁场中快子的拉格朗日量为：

$$L = m\sqrt{\dot{\vec{x}}^2 - 1} + q(\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} - \phi),$$

广义动量

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2 - 1}} + q\vec{A}.$$

反解得到：

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 - m^2}}$$

故哈密顿函数为：

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L \\ &= \sqrt{(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t))^2 - m^2} + q\phi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

哈密顿正则方程为：

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 - m^2}}$$

Solution

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \\
 &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{A}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} - q \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \\
 &= \frac{q(\vec{p} - q\vec{A})}{\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 - m^2}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} - q \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}}
 \end{aligned}$$