

理论力学 A

作业 23 参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 12 月 14 日

第六章哈密顿力学

1. 相对论粒子的拉氏函数是

$$L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} - q[\phi(t, \mathbf{x}) - \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}]$$

(1) 检验拉氏函数是否奇异。

(2) 作勒让德变换，求出哈密顿函数 $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ 。

解答

(1) 拉氏函数的 Hessian 矩阵定义为 $W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}$ ，其中 $v_i = \dot{x}_i$ 。相互作用项 $-q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$ 关于速度是线性的，其二阶导数为 0。因此只需考虑动能项 $L_0 = -\sqrt{1 - v^2}$ 。

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - v^2}}(-2v_i) = \frac{v_i}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} = \frac{\delta_{ij}\sqrt{1 - v^2} - v_i \frac{-v_j}{\sqrt{1 - v^2}}}{1 - v^2} = \frac{(1 - v^2)\delta_{ij} + v_i v_j}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

根据简略答案，该 Hessian 矩阵的行列式为：

$$\det(W) = \frac{1}{(1 - v^2)^{5/2}} \neq 0$$

(注：若考虑完整维度， D 维空间中行列式为 $(1 - v^2)^{-(D+2)/2}$)。由于行列式不为零，拉氏函数是非奇异的。

(2) 广义动量：

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}} + q\mathbf{A}$$

为了反解速度 $\dot{\mathbf{x}}$ ，定义机械动量 $\mathbf{P} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ ：

$$\mathbf{P} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2}} \implies P^2 = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} \implies \dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{P^2}{1 + P^2}$$

且有 $\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2}}$ ，故 $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{P}}{\sqrt{1 + P^2}}$ 。

哈密顿函数定义为：

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left(-\sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right)$$

$$H = (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} + q\phi = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \sqrt{1 - \dot{\mathbf{x}}^2} + q\phi$$

代入 $\dot{\mathbf{x}}$ 的表达式：

$$H = \frac{P^2}{\sqrt{1 + P^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + P^2}} + q\phi = \frac{1 + P^2}{\sqrt{1 + P^2}} + q\phi = \sqrt{1 + P^2} + q\phi$$

即：

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{1 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + q\phi$$

以下三题，选做其二

2. 以向上为极轴，在球坐标下的写出球面摆的哈密顿量和哈密顿方程。在这个坐标系下，球面摆系统有哪些首次积分？

解答

设摆长为 l ，质量为 m 。以向上为极轴（ z 轴），球坐标定义为： $x = l \sin \theta \cos \varphi$, $y = l \sin \theta \sin \varphi$, $z = l \cos \theta$ 。

1. 动能： $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$ 。势能： $V = mgz = mgl \cos \theta$ 。

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \theta$$

2. 广义动量：

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

哈密顿量 $H = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = T + V$ （因 L 关于广义速度是二次齐次函数且势能不含速度）：

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

3.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta} + mgl \sin \theta \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2 \sin^2 \theta} \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

4. • H 不显含时间 t , 故哈密顿量 (即总能量 E) 守恒: $H = E = \text{const.}$
 • H 不显含坐标 φ (φ 是循环坐标), 故共轭动量守恒: $p_\varphi = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z = \text{const}$ (角动量 z 分量守恒)。

3. 光线在自聚焦光纤中传播时, 已知在柱坐标系下的正则函数 (哈密顿量) 为

$$H(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z) = \frac{1}{2n_0^2(1 - \alpha^2 r^2)}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2)$$

(1) 该系统有哪些首次积分?

(2) 求拉格朗日函数。

解答

(1) 哈密顿正则方程 $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ 。

- H 不显含 θ , θ 为循环坐标 $\Rightarrow p_\theta = \text{const.}$
- H 不显含 z , z 为循环坐标 $\Rightarrow p_z = \text{const.}$
- H 不显含演化参数 (类似于时间 t), 故 H 本身守恒: $H = \text{const.}$

因此, 首次积分有 H, p_θ, p_z 。

(2) 令 $A(r) = \frac{1}{n_0^2(1 - \alpha^2 r^2)}$, 则 $H = \frac{A}{2}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2)$ 。根据哈密顿方程 $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$:

$$\dot{r} = A p_r \Rightarrow p_r = \frac{\dot{r}}{A}$$

$$\dot{\theta} = A \frac{p_\theta}{r^2} \Rightarrow p_\theta = \frac{r^2 \dot{\theta}}{A}$$

$$\dot{z} = A p_z \Rightarrow p_z = \frac{\dot{z}}{A}$$

拉格朗日函数 $L = \sum p_i \dot{q}_i - H$:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{\dot{r}^2}{A} + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{A} + \frac{\dot{z}^2}{A} \right) - \frac{A}{2} \left[\left(\frac{\dot{r}}{A} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2 \dot{\theta}}{A} \right)^2 + \left(\frac{\dot{z}}{A} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{A}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2A}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2A}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned}$$

代入 $A(r)$ 的表达式:

$$L = \frac{1}{2} n_0^2 (1 - \alpha^2 r^2) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

4. 质量为 m , 电荷为 q 的带电粒子, 在电磁场 $\mathbf{E} = \frac{E_0}{r}\mathbf{e}_r$, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ 中运动, 其中 (r, θ, z) 为柱坐标。写出系统的哈密顿函数和哈密顿方程。

解答

1. 电势 ϕ : 由 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, $\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{E_0}{r} \implies \phi = -E_0 \ln r$ 。矢势 $\mathbf{A}$: 由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B_0\mathbf{e}_z$, 在对称规范下取 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}B_0r\mathbf{e}_\theta$ 。

2.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + qE_0 \ln r + \frac{1}{2}qB_0r^2\dot{\theta}$$

3. 广义动量:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_z = m\dot{z}$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}qB_0r^2$$

反解速度:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta - \frac{1}{2}qB_0r^2}{mr^2}$$

哈密顿函数 $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$ (或直接利用 $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi$):

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{(p_\theta - \frac{1}{2}qB_0r^2)^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} - qE_0 \ln r$$

4.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(p_\theta - \frac{1}{2}qB_0r^2)^2}{2mr^2} - qE_0 \ln r \right] \\ \quad = \frac{(p_\theta - \frac{1}{2}qB_0r^2)^2}{mr^3} + \frac{(p_\theta - \frac{1}{2}qB_0r^2)qB_0}{m} + \frac{qE_0}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta - \frac{1}{2}qB_0r^2}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (p_\theta \text{ 守恒}) \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (p_z \text{ 守恒}) \end{array} \right.$$