

理论力学作业 22 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

以下三题选做其一：

7. 已知 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，证明恒等式

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_{n \times n}.$$

Solution

矩阵指数：

$$e^{iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iA)^k}{k!}.$$

比较正余弦的泰勒展开，有矩阵欧拉公式：

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A, \quad e^{-iA} = \cos A - i \sin A.$$

于是

$$\cos A = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2}, \quad \sin A = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}.$$

$[A, A] = 0$ ，由于 Baker-Hausdorff 公式， $e^{iA}e^{-iA} = I, e^{iA}e^{iA} = e^{2iA}$ ，故

$$\begin{aligned} \cos^2 A &= \frac{e^{2iA} + 2I + e^{-2iA}}{4}, \\ \sin^2 A &= \frac{e^{2iA} - 2I + e^{-2iA}}{-4} = \frac{-e^{2iA} + 2I - e^{-2iA}}{4}. \end{aligned}$$

相加得：

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \frac{(e^{2iA} + 2I + e^{-2iA}) + (-e^{2iA} + 2I - e^{-2iA})}{4} = \frac{4I}{4} = I.$$

8. 已知 2 阶方阵

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{12} & \frac{7\pi}{12} \\ -\frac{5\pi}{12} & \frac{11\pi}{12} \end{pmatrix},$$

利用 Cayley-Hamilton 定理化简矩阵函数 $\cos M$ 。

Solution

$$\operatorname{tr}(M) = -\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}, \quad \det(M) = \left(-\frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{11\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} \cdot \left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{11\pi^2}{144} + \frac{35\pi^2}{144} = \frac{\pi^2}{6}.$$

因此矩阵的特征多项式为

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5\pi}{6}\lambda + \frac{\pi^2}{6}.$$

应用 Cayley-Hamilton 定理

$$M^2 - \frac{5\pi}{6}M + \frac{\pi^2}{6}I = 0 \implies M^2 = \frac{5\pi}{6}M - \frac{\pi^2}{6}I.$$

由此, 任意 M^k ($k \geq 2$) 可表示为 M 与 I 的线性组合。

设 $\cos M = C_0I + C_1M$

由特征方程解得特征值:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{\frac{25\pi^2}{36} - \frac{4\pi^2}{6}}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}}{2}.$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{3}.$$

下面确定 C_0, C_1 :

对任意矩阵函数 $f(M)$, 若可写成 $f(M) = c_0I + c_1M$, 则对每个特征值有

$$f(\lambda_i) = c_0 + c_1\lambda_i.$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = C_0 + C_1 \cdot \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} = C_0 + C_1 \cdot \frac{\pi}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = C_0 + \frac{\pi}{2}C_1 \\ \frac{1}{2} = C_0 + \frac{\pi}{3}C_1 \end{cases}$$

相减得: $\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{\pi}$ 。

代入得: $0 = C_0 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{3}{\pi}\right) = C_0 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_0 = \frac{3}{2}$ 。

$$\cos M = \frac{3}{2}I - \frac{3}{\pi}M = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

9. 写出第 4 题中的时间演化矩阵 $U(t, 0)$ 并化简。

Solution

由第 20 次作业知，系统的惯性矩阵为：

$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

刚度矩阵为：

$$K = k \begin{pmatrix} 7/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

时间演化矩阵为

$$U(t, 0) = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix} t \right\} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{M^{-1}K} t) & \frac{\sin(\sqrt{M^{-1}K} t)}{\sqrt{M^{-1}K}} \\ -\sqrt{M^{-1}K} \sin(\sqrt{M^{-1}K} t) & \cos(\sqrt{M^{-1}K} t) \end{pmatrix},$$

其中 $\sqrt{M^{-1}K}$ 是满足 $(\sqrt{M^{-1}K})^2 = M^{-1}K$ 的矩阵平方根。

化简 $\cos(\sqrt{M^{-1}K} t)$ 部分

令 $A = M^{-1}K$ ，则

$$A = \omega_0^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

特征多项式：

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\omega_0^2\lambda + 2\omega_0^4 = 0$$

特征值：

$$\lambda_1 = \omega_0^2, \quad \lambda_2 = 2\omega_0^2$$

对应的开方特征值：

$$\sqrt{\lambda_1} = \omega_0, \quad \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}\omega_0.$$

由 Cayley-Hamilton 定理， $\cos(\sqrt{A}t)$ 可表为 A 的线性组合：

$$\cos(\sqrt{A}t) = c_0 I + c_1 A,$$

其中 c_0, c_1 由以下方程组确定：

$$\begin{cases} \cos(\omega_0 t) = c_0 + c_1 \omega_0^2, \\ \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) = c_0 + 2c_1 \omega_0^2. \end{cases}$$

解得：

$$c_1 = \frac{\cos(\sqrt{2}\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2}, \quad c_0 = 2\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{2}\omega_0 t).$$

Solution

代入 A 的表达式:

$$\cos(\sqrt{A}t) = [2\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{2}\omega_0 t)]I + [\cos(\sqrt{2}\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)] \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

记 $C_1 = \cos(\omega_0 t)$, $C_2 = \cos(\sqrt{2}\omega_0 t)$, 则:

$$\cos(\sqrt{A}t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} C_1 + 3C_2 & \sqrt{3}(C_1 - C_2) \\ \sqrt{3}(C_1 - C_2) & 3C_1 + C_2 \end{pmatrix}.$$

下面化简 $\frac{\sin(\sqrt{M^{-1}K}t)}{\sqrt{M^{-1}K}}$ 部分:

设

$$\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}} = d_0 I + d_1 A,$$

由条件:

$$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} = d_0 + d_1 \omega_0^2, \quad \frac{\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}\omega_0} = d_0 + 2d_1 \omega_0^2.$$

解得:

$$d_1 = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}\omega_0} - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \right], \quad d_0 = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - d_1 \omega_0^2.$$

即:

$$d_0 = \frac{2\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \frac{\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}\omega_0}, \quad d_1 = \frac{\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}\omega_0^3} - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^3}.$$

代入 A 表达式并化简, 得:

$$\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{3\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} + \frac{\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}\omega_0} & \frac{\sqrt{3}}{\omega_0} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}} \right] \\ \frac{\sqrt{3}}{\omega_0} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}} \right] & \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} + \frac{3\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)}{\sqrt{2}\omega_0} \end{pmatrix}.$$

化简 $-\sqrt{M^{-1}K} \sin(\sqrt{M^{-1}K}t)$ 部分:

设

$$\sqrt{A} \sin(\sqrt{A}t) = e_0 I + e_1 A,$$

由条件:

$$\omega_0 \sin(\omega_0 t) = e_0 + e_1 \omega_0^2, \quad \sqrt{2}\omega_0 \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) = e_0 + 2e_1 \omega_0^2.$$

解得:

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}\omega_0 \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2}, \quad e_0 = \omega_0 \sin(\omega_0 t) - e_1 \omega_0^2.$$

Solution

代入 A 并取负号:

$$-\sqrt{A} \sin(\sqrt{A}t) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \sqrt{2}\omega_0 \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) & \sqrt{3}\omega_0 [\sin(\omega_0 t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)] \\ \sqrt{3}\omega_0 [\sin(\omega_0 t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\omega_0 t)] & \omega_0 \sin(\omega_0 t) + 3\sqrt{2}\omega_0 \sin(\sqrt{2}\omega_0 t) \end{pmatrix}.$$

综上:

$$U(t, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} C_1 + 3C_2 & \sqrt{3}(C_1 - C_2) \\ \sqrt{3}(C_1 - C_2) & 3C_1 + C_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{3S_1}{\omega_0} + \frac{S_2}{\sqrt{2}\omega_0} & \frac{\sqrt{3}}{\omega_0} \left(S_1 - \frac{S_2}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{\omega_0} \left(S_1 - \frac{S_2}{\sqrt{2}}\right) & \frac{S_1}{\omega_0} + \frac{3S_2}{\sqrt{2}\omega_0} \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\omega_0 S_1 + \sqrt{2}\omega_0 S_2 & \sqrt{3}\omega_0(S_1 - \sqrt{2}S_2) \\ \sqrt{3}\omega_0(S_1 - \sqrt{2}S_2) & \omega_0 S_1 + 3\sqrt{2}\omega_0 S_2 \end{pmatrix} & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} C_1 + 3C_2 & \sqrt{3}(C_1 - C_2) \\ \sqrt{3}(C_1 - C_2) & 3C_1 + C_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

其中简记为:

$$C_1 = \cos(\omega_0 t), \quad C_2 = \cos(\sqrt{2}\omega_0 t), \quad S_1 = \sin(\omega_0 t), \quad S_2 = \sin(\sqrt{2}\omega_0 t).$$

此即为第 4 题微振动系统时间演化矩阵 $U(t, 0)$ 的化简显式。

10. 第 4 题中的粒子, 开始时处于静止状态。设粒子带有电荷 e , 并且受到电场

$$\vec{E} = E \cos \omega t \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

的驱动, 求微振动解。

Solution

由第 4 题, 微振动方程为

$$M\ddot{\vec{\eta}} + K\vec{\eta} = \vec{F}(t),$$

其中

$$M = mI_{2 \times 2}, \quad K = k \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}(t) = e \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix}.$$

系统的模态矩阵为

$$A = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution

该矩阵列矢量满足广义特征方程：

$$K\vec{a}_1 = m\omega_1^2\vec{a}_1, \quad K\vec{a}_2 = m\omega_2^2\vec{a}_2,$$

其中 $\vec{a}$ 为 A 的列矢量，自然频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

定义简正坐标 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ 满足

$$\vec{\eta} = A\vec{\xi}.$$

将 $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$ 代入运动方程并左乘 A^T ：

$$mA^T A\ddot{\vec{\xi}} + A^T K A\vec{\xi} = A^T \vec{F}(t).$$

计算：

$$A^T A = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T K A = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = (A^T \vec{F})_1, \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = (A^T \vec{F})_2.$$

计算广义力：

$$A^T \vec{F} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} eE_x \\ eE_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}} eE \cos(\omega t) \begin{pmatrix} \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix}.$$

记

$$Q_1(t) = eE(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) \cos(\omega t), \quad Q_2(t) = eE(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \cos(\omega t).$$

则

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2 \xi_1 = \frac{Q_1(t)}{2\sqrt{m}}, \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2 \xi_2 = \frac{Q_2(t)}{2\sqrt{m}}.$$

先考虑非共振情况 ($\omega \neq \omega_1, \omega_2$)

方程 $\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = Q_j(t)$ 的通解为齐次解加特解：

$$\xi_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) + \xi_{jp}(t).$$

设特解形式为 $\xi_{jp}(t) = C_j \cos(\omega t)$ ，代入得：

$$(-\omega^2 + \omega_j^2)C_j \cos(\omega t) = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}} \cos(\omega t), \quad \gamma_1 = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \quad \gamma_2 = \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta.$$

Solution

解得

$$C_j = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2 - \omega^2)}.$$

因此

$$\xi_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) + \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

由初条件 $\xi_j(0) = 0, \dot{\xi}_j(0) = 0$:

$$A_j + \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2 - \omega^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_j = -\frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2 - \omega^2)},$$

$$\dot{\xi}_j(0) = B_j \omega_j = 0 \quad \Rightarrow \quad B_j = 0.$$

于是

$$\xi_j(t) = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_j t)].$$

考虑共振情况

若 $\omega = \omega_j$, 则特解形式需改为:

$$\xi_{jp}(t) = C_j t \sin(\omega_j t).$$

代入方程:

$$\ddot{\xi}_{jp} + \omega_j^2 \xi_{jp} = 2\omega_j C_j \cos(\omega_j t) = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}} \cos(\omega_j t),$$

解得

$$C_j = \frac{eE\gamma_j}{4\sqrt{m}\omega_j}.$$

通解为:

$$\xi_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t) + \frac{eE\gamma_j}{4\sqrt{m}\omega_j} t \sin(\omega_j t).$$

由初条件 $\xi_j(0) = 0, \dot{\xi}_j(0) = 0$:

$$A_j = 0, \quad B_j = 0.$$

故共振时

$$\xi_j(t) = \frac{eE\gamma_j}{4\sqrt{m}\omega_j} t \sin(\omega_j t).$$

可将简正坐标的表达式统一写为 (注意区分共振与非共振):

$$\xi_1(t) = \begin{cases} \frac{eE\gamma_1}{2\sqrt{m}(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)], & \omega \neq \omega_0, \\ \frac{eE\gamma_1}{4\sqrt{m}\omega_0} t \sin(\omega_0 t), & \omega = \omega_0. \end{cases}$$

Solution

$$\xi_2(t) = \begin{cases} \frac{eE\gamma_2}{2\sqrt{m}(2\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\sqrt{2}\omega_0 t)], & \omega \neq \sqrt{2}\omega_0, \\ \frac{eE\gamma_2}{4\sqrt{2m}\omega_0} t \sin(\sqrt{2}\omega_0 t), & \omega = \sqrt{2}\omega_0. \end{cases}$$

从简正坐标返回原始坐标,

由 $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$:

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{m}} [\xi_1(t) + \sqrt{3}\xi_2(t)], \quad y(t) = \frac{1}{2\sqrt{m}} [\sqrt{3}\xi_1(t) - \xi_2(t)].$$

代入 ξ_1, ξ_2 表达式, 即得微振动解。下面写出非共振情形的显式结果 (共振情形类似可得):

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{eE\gamma_1}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \\ &\quad + \frac{eE\gamma_2\sqrt{3}}{4m(2\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\sqrt{2}\omega_0 t)], \\ y(t) &= \frac{eE\gamma_1\sqrt{3}}{4m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \\ &\quad - \frac{eE\gamma_2}{4m(2\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\sqrt{2}\omega_0 t)], \end{aligned}$$

其中 $\gamma_1 = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$, $\gamma_2 = \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ 。

当 $\omega = \omega_0$ 或 $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ 时, 对应项需替换为共振形式, 振幅随时间线性增长 (增长过多后微振动法不适用)。

11. 一维阻尼振子的运动方程为

$$m\ddot{\eta} + \mu\dot{\eta} + k\eta = 0.$$

引进相空间矢量 $(\eta(t), \dot{\eta}(t))$, 方程可以改写成

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}.$$

- (1) 写出 2×2 矩阵 B 。
- (2) 化简时间演化矩阵 $\exp(Bt)$ 。
- (3) 如果系统受到冲击力

$$Q(t) = \delta(t - t')$$

的作用, 求格林函数 $G(t, t')$ 。

Solution

1.

由于

$$m\ddot{\eta} + \mu\dot{\eta} + k\eta = 0.$$

故

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}.$$

故

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix},$$

其中定义

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\mu}{2m}.$$

2.

需要计算矩阵指数 e^{Bt} 。矩阵 B 的特征多项式为

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

记

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (\text{欠阻尼情形}), \quad \Gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (\text{过阻尼情形}).$$

利用 Cayley-Hamilton 定理：设

$$e^{Bt} = c_0(t)I + c_1(t)B,$$

其中 $c_0(t), c_1(t)$ 待定。代入特征值 $\lambda_{1,2}$ 应满足：

$$e^{\lambda_j t} = c_0(t) + c_1(t)\lambda_j, \quad j = 1, 2.$$

情况 1：欠阻尼 ($\omega_0 > \beta$)，此时 $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$ 。联立方程：

$$e^{(-\beta+i\omega)t} = c_0 + c_1(-\beta + i\omega),$$

$$e^{(-\beta-i\omega)t} = c_0 + c_1(-\beta - i\omega).$$

解得

$$c_0(t) = e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right),$$

$$c_1(t) = \frac{e^{-\beta t}}{\omega} \sin \omega t.$$

情况 2: 过阻尼 ($\beta > \omega_0$), 此时 $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \Gamma$. 解得

$$c_0(t) = \frac{1}{2}e^{-\beta t} \left[\left(1 + \frac{\beta}{\Gamma}\right) e^{\Gamma t} + \left(1 - \frac{\beta}{\Gamma}\right) e^{-\Gamma t} \right],$$

$$c_1(t) = \frac{e^{-\beta t}}{2\Gamma} (e^{\Gamma t} - e^{-\Gamma t}).$$

情况 3: 临界阻尼 ($\beta = \omega_0$), 此时 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$. 对情况二取极限, 此时方程变为:

$$e^{-\beta t} = c_0 - \beta c_1, \quad te^{-\beta t} = c_1.$$

解得

$$c_0(t) = e^{-\beta t}(1 + \beta t), \quad c_1(t) = te^{-\beta t}.$$

3.

对于方程

$$m\ddot{\eta} + \mu\dot{\eta} + k\eta = \delta(t - t'),$$

定义格林函数 $G(t, t')$ 为满足零初条件 ($\eta(t'^-) = 0, \dot{\eta}(t'^-) = 0$) 的解。

我们这里采用拉普拉斯变换法

设 $\tau = t - t' \geq 0$, 设 G 为所求的格林函数, 考虑方程

$$m\ddot{G}(\tau) + \mu\dot{G}(\tau) + kG(\tau) = \delta(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

初条件: $G(0^-) = 0, \dot{G}(0^-) = 0$ 。

对上述方程作拉普拉斯变换 (记 $\mathcal{L}[G(\tau)] = \tilde{G}(s)$):

$$\mathcal{L}[\ddot{G}(\tau)] = s^2\tilde{G}(s) - sG(0^-) - \dot{G}(0^-) = s^2\tilde{G}(s),$$

$$\mathcal{L}[\dot{G}(\tau)] = s\tilde{G}(s) - G(0^-) = s\tilde{G}(s),$$

$$\mathcal{L}[\delta(\tau)] = 1.$$

代入方程:

$$ms^2\tilde{G}(s) + \mu s\tilde{G}(s) + k\tilde{G}(s) = 1.$$

解得

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{ms^2 + \mu s + k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2},$$

其中 $\omega_0^2 = k/m$, $\beta = \mu/(2m)$ 。

Solution

分三种情况求拉普拉斯逆变换:

情况 1: 欠阻尼 ($\omega_0 > \beta$)

令 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, 则

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s + \beta)^2 + \omega^2}.$$

查拉普拉斯变换表或利用公式:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + \beta)^2 + \omega^2} \right] = \frac{e^{-\beta\tau}}{\omega} \sin(\omega\tau) \cdot h(\tau).$$

故

$$G(\tau) = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{-\beta\tau}}{\omega} \sin(\omega\tau) \cdot h(\tau).$$

情况 2: 过阻尼 ($\beta > \omega_0$)

令 $\Gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, 则

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s + \beta)^2 - \Gamma^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\Gamma} \left(\frac{1}{s + \beta - \Gamma} - \frac{1}{s + \beta + \Gamma} \right).$$

逆变换:

$$G(\tau) = \frac{1}{2m\Gamma} (e^{-(\beta-\Gamma)\tau} - e^{-(\beta+\Gamma)\tau}) h(\tau) = \frac{e^{-\beta\tau}}{m\Gamma} \sinh(\Gamma\tau) \cdot h(\tau).$$

情况 3: 临界阻尼 ($\beta = \omega_0$)

此时

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s + \beta)^2}.$$

逆变换:

$$G(\tau) = \frac{1}{m} \cdot \tau e^{-\beta\tau} \cdot h(\tau).$$

综上, 格林函数为:

$$G(t, t') = h(t - t') \cdot \begin{cases} \frac{e^{-\beta(t-t')}}{m\omega} \sin[\omega(t - t')], & \omega_0 > \beta, \\ \frac{e^{-\beta(t-t')}}{m\Gamma} \sinh[\Gamma(t - t')], & \beta > \omega_0, \\ \frac{1}{m}(t - t')e^{-\beta(t-t')}, & \beta = \omega_0, \end{cases}$$

其中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $\Gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $\beta = \frac{\mu}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ 。