

理论力学 A

作业 21 参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 12 月 14 日

第五章微振动

5. 如图，质量 m_1, m_2 的两种原子，交替排列成一维晶格，原子之间的间隔为 $a/2$ 微振动坐标 $\{x_n(t)|n \in \mathbb{Z}\}$ 表示原子相对于平衡位置的偏移只考虑近邻原子之间的相互作用，取简谐近似，势函数为

$$V = \frac{1}{2}\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n - x_{n-1})^2$$

- (1) 写出系统的拉氏函数
- (2) 对 n 是奇数和偶数两种情况，分别写出系统的运动方程
- (3) 设 $x_{2n}(t) = c_1 e^{-i\omega t} e^{in\theta}$, $x_{2n+1}(t) = c_2 e^{-i\omega t} e^{in\theta}$ ，代入运动方程，给出 c_1, c_2 满足的线性方程组
- (4) 利用 c_1, c_2 有非零解的条件，求 $\omega^2 = \omega^2(\theta)$
- (5) 所得的两组解，低频解 $\omega_A^2(\theta)$ 称为声学支振动，高频解 $\omega_O^2(\theta)$ 称为光学支振动求声学支的最高频率 $\max(\omega_A)$ 和光学支的最低频率 $\min(\omega_O)$
- (6) 计算 $\min(\omega_O) - \max(\omega_A)$ 声学支与光学支之间有没有频率禁带？
- (7) 令 $\theta = ka$ ，给出色散关系 $\omega_A(k)$ 和 $\omega_O(k)$
- (8) 当 $k \rightarrow 0$ 时，声学支有没有色散？光学支有没有色散？

解答

必要假设： $m_1 \neq m_2$

(1) 拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i (m_1 \dot{x}_{2i}^2 + m_2 \dot{x}_{2i+1}^2) - \frac{1}{2} \beta \sum_n [(x_n - x_{n-1})^2]$$

更具体地，势能项展开为：

$$L = \frac{1}{2} \sum_i (m_1 \dot{x}_{2i}^2 + m_2 \dot{x}_{2i+1}^2) - \frac{1}{2} \beta \sum_i [(x_{2i+1} - x_{2i})^2 + (x_{2i} - x_{2i-1})^2]$$

(2) 对于偶数点 $n = 2i$ (质量为 m_1):

$$m_1 \ddot{x}_{2i} + \beta(2x_{2i} - x_{2i+1} - x_{2i-1}) = 0$$

对于奇数点 $n = 2i + 1$ (质量为 m_2):

$$m_2 \ddot{x}_{2i+1} + \beta(2x_{2i+1} - x_{2i+2} - x_{2i}) = 0$$

(3) 将试探解 $x_{2n} = c_1 e^{-i\omega t} e^{in\theta}$ 和 $x_{2n+1} = c_2 e^{-i\omega t} e^{in\theta}$ 代入运动方程: 对于第一个方程:

$$m_1(-\omega^2)c_1 + \beta[2c_1 - c_2 - c_2 e^{-i\theta}] = 0$$

$$(m_1\omega^2 - 2\beta)c_1 + \beta(1 + e^{-i\theta})c_2 = 0$$

对于第二个方程 (注意 x_{2i+2} 对应 $n + 1$, 即 $c_1 e^{i(n+1)\theta} = c_1 e^{in\theta} e^{i\theta}$):

$$m_2(-\omega^2)c_2 + \beta[2c_2 - c_1 e^{i\theta} - c_1] = 0$$

$$\beta(1 + e^{i\theta})c_1 + (m_2\omega^2 - 2\beta)c_2 = 0$$

(4) 系数矩阵行列式为零:

$$\det \begin{pmatrix} m_1\omega^2 - 2\beta & \beta(1 + e^{-i\theta}) \\ \beta(1 + e^{i\theta}) & m_2\omega^2 - 2\beta \end{pmatrix} = 0$$

$$(m_1\omega^2 - 2\beta)(m_2\omega^2 - 2\beta) - \beta^2(1 + e^{-i\theta})(1 + e^{i\theta}) = 0$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - 2\beta(m_1 + m_2)\omega^2 + 4\beta^2 - \beta^2(2 + 2\cos\theta) = 0$$

注意 $(1 + e^{-i\theta})(1 + e^{i\theta}) = 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2(\theta/2) = 4 - 4\sin^2(\theta/2)$ 解得:

$$\omega^2 = \frac{\beta}{m_1 m_2} \left[(m_1 + m_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]$$

(5) 考虑 θ 的取值范围 $-\pi \leq \theta < \pi$ 声学支 (取负号): 在 $\theta \rightarrow 0$ 时 $\omega \rightarrow 0$; 在 $\theta = \pm\pi$ 时取最大值

$$\max(\omega_A) = \omega_A(\pm\pi) = \sqrt{\frac{\beta}{m_1 m_2} [(m_1 + m_2) - |m_1 - m_2|]} = \sqrt{\frac{2\beta}{\max\{m_1, m_2\}}}$$

简略答案给出: $\max(\omega_A) = \frac{2\beta}{\max\{m_1, m_2\}}$ (这里可能有笔误, 应为频率平方或根号形式, 此处保留原意: 对应的 ω^2 为 $2\beta/m_{large}$) 光学支 (取正号): 在 $\theta = 0$ 时取最大值; 在 $\theta = \pm\pi$ 时取最小值

$$\min(\omega_O) = \omega_O(\pm\pi) = \sqrt{\frac{\beta}{m_1 m_2} [(m_1 + m_2) + |m_1 - m_2|]} = \sqrt{\frac{2\beta}{\min\{m_1, m_2\}}}$$

(6)

$$\min(\omega_O) - \max(\omega_A) = \sqrt{2\beta} \left(\frac{1}{\sqrt{m_{small}}} - \frac{1}{\sqrt{m_{large}}} \right) > 0$$

简略答案形式为：

$$\min(\omega_O^2) - \max(\omega_A^2) = \left| \frac{2\beta}{m_2} - \frac{2\beta}{m_1} \right| = \frac{2\beta|m_1 - m_2|}{m_1 m_2}$$

只要 $m_1 \neq m_2$ ，禁带宽度大于零，存在频率禁带

(7) 令 $\theta = ka$ (k 的取值范围 $-\frac{\pi}{a} \leq k < \frac{\pi}{a}$ 为第一布里渊区)：

$$\omega_A(k) = \sqrt{\frac{\beta}{m_1 m_2} \left[(m_1 + m_2) - \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \sin^2 \frac{ka}{2}} \right]}$$

$$\omega_O(k) = \sqrt{\frac{\beta}{m_1 m_2} \left[(m_1 + m_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2 \sin^2 \frac{ka}{2}} \right]}$$

(8) 当 $k \rightarrow 0$ 时， $\sin^2(ka/2) \approx (ka/2)^2$ 声学支：

$$\omega_A \approx \sqrt{\frac{\beta}{2(m_1 + m_2)}} ka + \mathcal{O}(k^2)$$

ω_A 与 k 成正比（线性关系）， $v_s = \omega/k$ 为常数，类似声波，有色散（严格来说线性色散关系通常称为无色散介质，但此处指 $d\omega/dk$ 在 k 较大时不为常数，或者指其依赖于 k 的高阶项，简答中称“有色散”）光学支：

$$\omega_O \approx \sqrt{\frac{2\beta}{\mu}} + \mathcal{O}(k^2) \quad (\text{其中 } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})$$

ω_O 在 $k=0$ 处有非零截距，群速度 $v_g = d\omega/dk \rightarrow 0$ ，无色散（指 $k \rightarrow 0$ 附近频率几乎不变）

6. 矩阵 A 满足特征方程 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 证明矩阵函数 $f(A)$ 满足方程

$$f(A)\mathbf{x} = f(\lambda)\mathbf{x}$$

解答

证明： 设 $f(x)$ 可以展开为多项式或幂级数形式 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 对于矩阵 A 的特征值 λ 和特征向量 $\mathbf{x}$ ，有 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 考虑 $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$

一般地，由归纳法可得 $A^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$ 因此：

$$f(A)\mathbf{x} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \right) \mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (A^k \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k \mathbf{x} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k \right) \mathbf{x} = f(\lambda) \mathbf{x}$$

证毕