

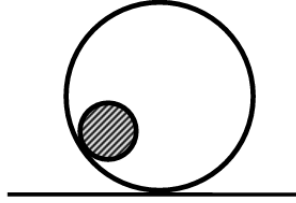
理论力学作业 20 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

以下两题，选做其一：

1.

一个半径为 R 、质量为 M 的均质圆筒水平放置在粗糙的地面上作无滑滚动。在圆筒内再放入一个质量为 m 、半径为 r 的圆柱体。圆柱体的轴向和圆筒的轴向平行，沿圆筒内表面作无滑滚动。



(1) 选取合适的广义坐标，给出系统的运动方程。

(2) 设 $m = 4M = 4$ 千克， $r = \frac{1}{2}R = 0.5$ 米，如果系统作小振动，其简正频率是多少？

Solution

(1)

设圆筒绕其中心的转动角为 φ ，圆柱质心相对于圆筒中心竖直向下方向的夹角为 θ 。

根据外圆筒与地面无滑，设外圆筒质心横坐标为 x ：

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}$$

内圆柱的质心坐标为 $(x - (R - r)\sin\theta, (R - r)(1 - \cos\theta))$ ，（这里选圆柱质心最低点为 y 方向原点）设圆柱的自转角度为 α ，则由圆柱的无滑滚动得：

$$(R - r)\dot{\theta} - r\dot{\alpha} = R\dot{\varphi}$$

系统的总动能为：

$$\begin{aligned} T &= MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m \left[R\dot{\varphi} - (R - r)\cos\theta\dot{\theta} \right]^2 + \frac{1}{2}m(R - r)^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m \left[(R - r)\dot{\theta} - R\dot{\varphi} \right]^2 \\ &= \left(M + \frac{3}{4}m \right) R^2\dot{\varphi}^2 - mR(R - r) \left(\cos\theta + \frac{1}{2} \right) \dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Solution

系统的势能:

$$V = mg(R - r)(1 - \cos \theta)$$

拉格朗日函数: $L = T - V$

由拉格朗日方程得到运动方程:

对于广义坐标 φ :

$$\left(2M + \frac{3}{2}m\right) R^2 \ddot{\varphi} - mR(R - r) \left[\left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right) \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2 \right] = 0$$

对于广义坐标 θ :

$$\frac{3}{2}m(R - r)^2 \ddot{\theta} - m(R - r) \left[R \left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right) \ddot{\varphi} - g \sin \theta \right] = 0$$

(2)

将题中所给参数数据代入, 并取至二阶无穷小, 得:

$$T = 4\dot{\varphi}^2 - 3\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{3}{4}\dot{\theta}^2$$

$$V = g\theta^2$$

因此惯性矩阵为:

$$M = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1.5 \end{pmatrix}$$

刚度矩阵为:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2g \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0$$

即:

$$\det \begin{pmatrix} -8\omega^2 & 3\omega^2 \\ 3\omega^2 & -1.5\omega^2 + 2g \end{pmatrix} = 0$$

计算行列式:

$$(-8\omega^2)(-1.5\omega^2 + 2g) - (3\omega^2)(3\omega^2) = 0$$

$$\omega^2(3\omega^2 - 16g) = 0$$

Solution

解得：

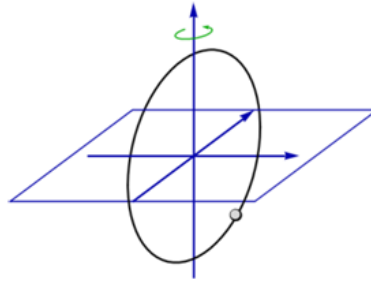
$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{16g}{3}$$

因此：

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{16g}{3}} \approx 7.23 \text{ rad/s}$$

2.

圆环在垂直平面内，绕通过圆心的垂直轴匀速旋转。圆环上穿有一个珠子，能在环上无阻滑动。求珠子的平衡位置和微振动频率。



Solution

取广义坐标 θ 为珠子在圆环上的角位置，从圆环最低点逆时针计量。

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\omega R \sin \theta)^2$$

其中第一项为珠子沿圆环运动的动能，第二项为珠子随圆环旋转的动能。

系统的势能为：

$$V = mgR(1 - \cos \theta)$$

拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta - mgR(1 - \cos \theta)$$

由拉格朗日方程可得：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

即：

$$mR^2\ddot{\theta} - m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta = 0$$

Solution

化简得：

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0$$

平衡时 $\ddot{\theta} = 0$ ，故：

$$\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0$$

解得三个平衡位置：

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi, \quad \theta = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 R} \right)$$

其中第三个平衡位置要求 $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$ 。

在平衡位置附近小振动，令 $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ ，代入运动方程并取一阶无穷小。

情况 1： $\theta = 0$ 一阶微扰后得：

$$\delta\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) \delta\theta = 0$$

当 $\omega^2 < \frac{g}{R}$ 时， $\theta = 0$ 稳定，微振动频率：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$$

情况 2： $\theta = \theta_0 + \delta\theta = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 R} \right) + \delta\theta$ ，则

$$\cos \theta = \cos (\theta_0 + \delta\theta) = \frac{g}{\omega^2 R} - \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}} \delta\theta$$

代入运动方程得：

$$\delta\ddot{\theta} + \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2} \right) \delta\theta = 0$$

当 $\omega^2 > \frac{g}{R}$ 时，该位置稳定，微振动频率：

$$\omega_\theta = \omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}}$$

情况 3： $\theta = \pi$ ，一阶微扰后得：

$$\delta\ddot{\theta} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2 \right) \delta\theta = 0$$

该位置总是不稳定。

综上，

平衡位置有三个： $\theta = 0$ ， $\theta = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 R} \right)$ ， $\theta = \pi$

当 $\omega^2 < \frac{g}{R}$ 时， $\theta = 0$ 稳定，微振动频率：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}$$

Solution

当 $\omega^2 > \frac{g}{R}$ 时, $\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$ 稳定, 微振动频率:

$$\omega_\theta = \omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}}$$

$\theta = \pi$ 不稳定

3.

质量 m 的 5 个小球, 穿在半径 a 的光滑圆环上运动。小球之间用弹性系数 k 的轻弹簧连接。求系统的自然频率和简正模式。



Solution

5 个质量为 m 的小球等间距分布在半径为 a 的光滑圆环上, 相邻小球间用弹性系数为 k 的弹簧连接。取平衡时小球的位置为参考, 设第 j 个小球的微小角位移为 θ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$)。由于圆环的约束, 小球的动能和势能分别为:

系统总动能为:

$$T = \frac{1}{2} m a^2 \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_j^2$$

惯性矩阵为:

$$M = m a^2 I$$

系统总势能为弹簧弹性势能: 相邻小球 j 与 $j+1$ 之间的弧长变化为 $a(\theta_{j+1} - \theta_j)$, 因此:

$$V = \frac{1}{2} k a^2 \sum_{j=1}^5 (\theta_{j+1} - \theta_j)^2$$

其中周期边界条件: $\theta_6 = \theta_1$ 。展开势能表达式:

$$V = \frac{1}{2} k a^2 [(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2 + (\theta_4 - \theta_3)^2 + (\theta_5 - \theta_4)^2 + (\theta_1 - \theta_5)^2]$$

Solution

由拉格朗日函数 $L = T - V$ 得到运动方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_j}$$

计算得:

$$ma^2\ddot{\theta}_j + ka^2(2\theta_j - \theta_{j-1} - \theta_{j+1}) = 0$$

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, 化简得:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_0^2(2\theta_j - \theta_{j-1} - \theta_{j+1}) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

周期边界条件: $\theta_0 = \theta_5, \theta_6 = \theta_1$ 。

设简正模式为

$$\theta_n = A_n e^{-i\omega t}$$

代入运动方程, 化简得

$$A_{n+1} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) A_n + A_{n-1} = 0$$

对应 (数列的) 特征方程为:

$$\lambda^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) \lambda + 1 = 0$$

设特征方程解为 λ_1, λ_2 , 则 $A_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$, 由于周期条件即 $A_{n+5} = A_n$, 故 $\lambda^5 = 1$, 因此

$$\lambda_1 = e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \quad \lambda_2 = e^{-i\frac{2k\pi}{5}} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

根据韦达定理, $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, 得

$$2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \cos \frac{2k\pi}{5}$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{5} \right)$$

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{k\pi}{5}$$

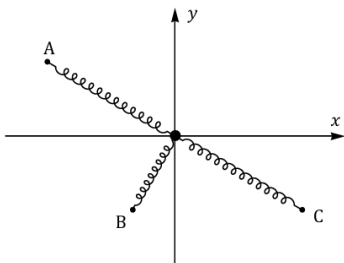
所以系统自然频率为: $\omega_0 = 0, \omega_{1,4} = 2\omega_0 \sin \frac{\pi}{5}, \omega_{2,3} = 2\omega_0 \sin \frac{2\pi}{5}$

取 $c_1 = 1, c_2 = 0, A_n^{(k)} = e^{i\frac{2k\pi n}{5}}$, 系统第 k 个简正模式则为:

$$\theta_n^{(k)} = A_n^{(k)} e^{-i\omega_k t} = e^{i(\frac{2k\pi n}{5} - \omega_k t)}$$

4.

如图所示，一个质量为 m 的粒子，通过三根自然长度分别为 $\sqrt{3}$ 、1 和 $\sqrt{3}$ 的轻弹簧，分别挂在 xy -平面内的三个固定点 A 、 B 和 C 上。弹簧的弹性系数都是 k ，三个固定点的坐标



分别是

$$A: \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad B: \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C: \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

设 xy -平面是光滑的水平面，且粒子不会脱离此平面。

(1) 写出系统的拉格朗日函数。

(2) 坐标原点显然是稳定平衡点。当粒子在平衡点附近作微振动时，求系统的自然频率和模态矩阵。

Solution

设粒子坐标为 (x, y) ，平衡位置为原点 $(0, 0)$ 。

记各弹簧长度：

$$L_A = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$L_B = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$L_C = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

弹性势能：

$$V = \frac{1}{2}k \left[(L_A - \sqrt{3})^2 + (L_B - 1)^2 + (L_C - \sqrt{3})^2 \right]$$

动能为 $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k \left[(L_A - \sqrt{3})^2 + (L_B - 1)^2 + (L_C - \sqrt{3})^2 \right]$$

Solution

惯性矩阵:

$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下面计算刚度矩阵, 分析弹簧 A 对势能的贡献:

$$\begin{aligned} (L_A - \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{3 + 3x - \sqrt{3}y + x^2 + y^2} - \sqrt{3})^2 \\ &= 6 + 3x - \sqrt{3}y + x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{3 + 3x - \sqrt{3}y + x^2 + y^2} \\ &= \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}xy \end{aligned}$$

故弹簧 A 对刚度矩阵贡献为:

$$K_A = k \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

同理可得矩阵 B、C 对刚度矩阵贡献为:

$$K_B = k \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$K_C = k \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

总刚度矩阵:

$$K = k \begin{pmatrix} 7/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

令 $\omega_0^2 = k/m$, 特征多项式为:

$$\det \begin{pmatrix} 7/4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 5/4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 - 3\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1, 2$$

得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

代入到特征方程, $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 时,

Solution

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \vec{a}_1 = 0$$

$\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ 时,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \vec{a}_2 = 0$$

解得归一的模态矩阵为:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$