

理论力学 A

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

作业 19 参考答案

日期：2025 年 11 月 25 日

第四章对称性和守恒量

9. 在 1+1 闵氏时空中，一个亚光速粒子受到最小耦合电磁作用.

- (1) 写出拉氏函数.
- (2) 写出运动方程.
- (3) 此模型中是否含有与速度成正比的作用力?

解答

- (1) **拉氏函数** 1+1 维时空 (1 个时间维 t , 1 个空间维 x) . 自由粒子的相对论拉氏量为 $-mc^2/\gamma = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$, 其中 $v = \dot{x}$. 电磁相互作用的拉氏量为 $-q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$. 在 1+1 维中, 矢量势 $\mathbf{A}$ 只有一个分量 A_x .

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - q\phi(t, x) + qA_x(t, x)\dot{x}$$

- (2) **运动方程** 欧拉-拉格朗日方程: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -mc^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} \left(-\frac{2\dot{x}}{c^2}\right) + qA_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} + qA_x = p + qA_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}$$

代入方程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p + qA_x) &= -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} \\ \frac{dp}{dt} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}\right) &= -q\frac{\partial \phi}{\partial x} + q\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} \\ \frac{dp}{dt} + q\frac{\partial A_x}{\partial t} &= -q\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{dp}{dt} &= q\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = qE_x \end{aligned}$$

其中 $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$ 是 1 维电场强度.

- (3) **与速度成正比的力**从运动方程 $\frac{dp}{dt} = qE_x$ 可以看出, 力的形式仅为电场力 qE_x . 在 1+1 维中, 不存在磁场 (因为磁场 $B = \nabla \times A$, 需要至少二维空间才能定义叉积或旋度, 或者说 $F_{\mu\nu}$ 中只有 $F_{01} = -E_x$ 分量, 没有磁场分量). 因此, 没有洛伦兹力项 $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. 结论: 此模型中**不含有**与速度成正比的力 (即没有磁力).

10. 电荷 q 、质量 m 的粒子在静电磁场中运动. 采用柱坐标系 (r, θ, z) , 设电场为

$$\mathbf{E} = \frac{a}{r} \mathbf{e}_r,$$

磁场为

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z.$$

- (1) 写出电磁场的四矢势 $(\phi, \mathbf{A})$.
- (2) 写出拉氏函数和运动方程.

解答

- (1) **四矢势**电场 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{a}{r} \implies \phi = -a \ln r + C$$

取 $C = 0$, 则 $\phi = -a \ln r$. 磁场 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B \mathbf{e}_z$. 在柱坐标下, 取 $\mathbf{A} = A_\theta(r) \mathbf{e}_\theta$.

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) = B$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) = Br \implies r A_\theta = \frac{1}{2} Br^2 \implies A_\theta = \frac{1}{2} Br$$

所以 $\mathbf{A} = \frac{1}{2} Br \mathbf{e}_\theta$. 四矢势为 $(\phi, \mathbf{A}) = (-a \ln r, \frac{1}{2} Br \mathbf{e}_\theta)$.

- (2) **拉氏函数和运动方程**相对论拉氏函数 (题目未明确, 但上下文是相对论, 若非相对论则 $\gamma \rightarrow 1$):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

在柱坐标下, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = (\frac{1}{2} Br \mathbf{e}_\theta) \cdot (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) = \frac{1}{2} Br(r\dot{\theta}) = \frac{1}{2} Br^2 \dot{\theta}$.

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + qa \ln r + \frac{1}{2} q Br^2 \dot{\theta}$$

运动方程:

- 对 z : 循环坐标 $\Rightarrow p_z = \gamma m \dot{z} = \text{const.}$
- 对 θ : 循环坐标 $\Rightarrow p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \gamma m r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q B r^2 = \text{const}$ (广义角动量守恒).

- 对 r :

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - (\gamma m r \dot{\theta}^2 + \frac{q a}{r} + q B r \dot{\theta}) = 0$$

$$\text{即 } \frac{dp_r}{dt} = \gamma m r \dot{\theta}^2 + q B r \dot{\theta} + \frac{q a}{r}.$$

11. 利用相对论运动方程

$$m[\gamma \mathbf{a} + \gamma^3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}] = \mathbf{F}.$$

(1) 求解加速度 $\mathbf{a}$. 提示: 可以利用 Cayley-Hamilton 定理.

(2) 记力 $\mathbf{F}$ 与加速度 $\mathbf{a}$ 的夹角为 θ_F , 请给出函数关系

$$\theta_F = \theta_F(\mathbf{F}, \mathbf{v}).$$

(3) 加速度与作用力是否平行? 求垂直于 $\mathbf{F}$ 方向的加速度 $\mathbf{a}_\perp$.

解答

(3) 求解加速度 设 $c = 1$. 相对论运动方程为:

$$m[\gamma \mathbf{a} + \gamma^3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}] = \mathbf{F}$$

利用 $\gamma^2 = \frac{1}{1-v^2}$, 可以将方程重写为矩阵形式。注意到 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v}^T \mathbf{a}$, 方程变为:

$$m\gamma(\mathbb{I} + \gamma^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

令矩阵 $\mathbf{M} = \mathbb{I} + \gamma^2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T$. 我们需要求解 $\mathbf{a}$, 即需要求逆矩阵 $\mathbf{M}^{-1}$. 根据 Cayley-Hamilton 定理或直接利用 $\mathbf{M}$ 的特征值性质: 矩阵 $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$ 的特征值为 v^2 (对应特征向量 $\mathbf{v}$) 和 0 (对应垂直于 $\mathbf{v}$ 的方向). 因此, 矩阵 $\mathbf{M}$ 的特征值为:

- 沿 $\mathbf{v}$ 方向: $1 + \gamma^2 v^2 = 1 + \frac{v^2}{1-v^2} = \frac{1}{1-v^2} = \gamma^2$
- 垂直于 $\mathbf{v}$ 方向: $1 + 0 = 1$

于是, 逆矩阵 $\mathbf{M}^{-1}$ 的特征值应为 γ^{-2} 和 1. 我们可以构造其形式为:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbb{I} + k \mathbf{v} \mathbf{v}^T$$

代入特征值方程： $1 + kv^2 = \gamma^{-2} = 1 - v^2 \implies k = -1$ 。所以：

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbb{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T$$

将逆矩阵作用于原方程 $\mathbf{a} = \frac{1}{m\gamma}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$ ：

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m\gamma}(\mathbb{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{F}$$

即加速度的表达式为：

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{m\gamma}$$

- (3) **加速度与力的夹角** 设力 $\mathbf{F}$ 与速度 $\mathbf{v}$ 的夹角为 θ (即 $\cos\theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{Fv}$)，力 $\mathbf{F}$ 与加速度 $\mathbf{a}$ 的夹角为 θ_F 。根据 (1) 中的结果，我们计算 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}$ 和 $|\mathbf{a}|$ 。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{m\gamma}[F^2 - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})^2] = \frac{F^2}{m\gamma}(1 - v^2 \cos^2 \theta)$$

计算加速度模长的平方：

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{m^2\gamma^2}|\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}|^2 \\ &= \frac{1}{m^2\gamma^2}[F^2 - 2(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})^2 v^2] \\ &= \frac{F^2}{m^2\gamma^2}[1 - (2 - v^2)v^2 \cos^2 \theta] \end{aligned}$$

利用 $\cos\theta_F = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}}{aF}$ ：

$$\cos\theta_F = \frac{\frac{F^2}{m\gamma}(1 - v^2 \cos^2 \theta)}{F \frac{F}{m\gamma} \sqrt{1 - (2v^2 - v^4) \cos^2 \theta}} = \frac{1 - v^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - (2v^2 - v^4) \cos^2 \theta}}$$

或者计算 $\tan\theta_F$ 得到更简洁的形式：

$$\tan\theta_F = \frac{v^2 \sin\theta \cos\theta}{1 - v^2 \cos^2 \theta}$$

其中 $\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{Fv}\right)$ 。函数关系为：

$$\theta_F(\mathbf{F}, \mathbf{v}) = \arctan\left(\frac{v^2 \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{Fv} \sqrt{1 - (\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{Fv})^2}}{1 - v^2 (\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{Fv})^2}\right) = \arctan\left(\frac{v(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \sqrt{F^2 v^2 - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})^2}}{F^2 v^2 - v^2 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})^2}\right)$$

通常写为关于 θ 的显式：

$$\theta_F = \arctan\left(\frac{v^2 \sin\theta \cos\theta}{1 - v^2 \cos^2 \theta}\right)$$

- (3) **加速度与力的方向**从 $\mathbf{a} = \frac{1}{m\gamma}\mathbf{F} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{m\gamma c^2}\mathbf{v}$ 可见, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{F}$ 一般不平行, 除非 $\mathbf{v} \parallel \mathbf{F}$ (纵向质量) 或 $\mathbf{v} \perp \mathbf{F}$ (横向质量) .

垂直于 $\mathbf{v}$ 方向的加速度 $\mathbf{a}_\perp$: 将 $\mathbf{F}$ 分解为平行于 $\mathbf{v}$ 的 $\mathbf{F}_\parallel$ 和垂直于 $\mathbf{v}$ 的 $\mathbf{F}_\perp$.

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m\gamma}(\mathbf{F}_\parallel + \mathbf{F}_\perp) - \frac{vF_\parallel}{m\gamma} \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\mathbf{F}_\perp}{m\gamma} + \frac{F_\parallel}{m\gamma}(1 - v^2) \frac{\mathbf{v}}{v}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_\perp}{m\gamma} + \frac{\mathbf{F}_\parallel}{m\gamma^3}$$

垂直分量 $\mathbf{a}_\perp$ 仅由 $\mathbf{F}_\perp$ 产生:

$$\mathbf{a}_\perp = \frac{\mathbf{F}_\perp}{m\gamma}$$

(这就是横向质量 $m\gamma$ 的来源, 而平行分量对应纵向质量 $m\gamma^3$).