

理论力学作业 14 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

5. 粒子在均匀引力场中自由下落，拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

- (1) 设初位移为 x_0 ，初速度为 v_0 ，求 $x(t)$ 。
- (2) 反解出 $x_0 = A(t, x, \dot{x})$ ， $v_0 = B(t, x, \dot{x})$ 。
- (3) 力学量 $A(t, x, \dot{x})$ 必然是守恒量，求对应的准对称变换。
- (4) 求力学量 $B(t, x, \dot{x})$ 对应的准对称变换。

Solution

(1).

粒子在均匀引力场中自由下落，拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\ddot{x} = g$$

积分得：

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

(2).

由运动解：

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

$$\dot{x} = gt + v_0$$

由第二式得：

$$v_0 = B(t, x, \dot{x}) = \dot{x} - gt$$

Solution

代入第一式:

$$x_0 = A(t, x, \dot{x}) = x - \dot{x}t + \frac{1}{2}gt^2$$

(3).

$A = x - \dot{x}t + \frac{1}{2}gt^2$ 是守恒量, 这个守恒量对应着力, 故其应由 Boost 变换产生。

猜测其对应的准对称变换为:

$$t' = t, \quad x' = x + at$$

其中 a, b 为无穷小量, 代入诺特定理,

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x} + a)^2 + mg(x + at) = L + ma\dot{x} + mgat + O(a^2)$$

$$\text{即 } \frac{d\varphi}{dt} = ma\dot{x} + mgat,$$

$$\Delta\varphi = max + \frac{1}{2}mgat^2$$

守恒量为:

$$\begin{aligned} p\Delta x - \Delta\varphi &= m\dot{x}(at + b) - max - \frac{1}{2}mgat^2 \\ &= -am(x - \dot{x}t + \frac{1}{2}gt^2) \end{aligned}$$

因此对应的准对称变换为 $t' = t, \quad x' = x + at$

(4).

$B = \dot{x} - gt$ 是守恒量, 对应动量定理, 故对应的准对称变换应为空间平移。

设对应的准对称变换为:

$$t' = t, \quad x' = x + a$$

根据诺特定理,

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg(x + a) = L + mga$$

故 $\frac{d\varphi}{dt} = mga$, 得

$$\varphi = mgat$$

守恒量为:

$$p\Delta x - \Delta\varphi = m\dot{x}a - mgat$$

即守恒量为 $\dot{x} - gt$, 对应的准对称变换为 $t' = t, \quad x' = x + a$

此题选做, 不计入成绩:

6. 试用最小作用量原理和伽利略协变性，推导牛顿三定律（Newton's Three Laws of Motion）：

- **Newton's First Law of Motion (Law of Inertia)** Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a straight line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.
- **Newton's Second Law of Motion** The acceleration produced by a particular force acting on a body is directly proportional to the magnitude of the force and inversely proportional to the mass of the body.
- **Newton's Third Law of Motion** To every action there is always opposed an equal reaction; or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts. - translated from the "Principia"

提示：

讲义中的推论可以直接引用。

惯性定律可以利用单个质点的拉氏函数推得。

为了证明第二定律，可以利用质点组的拉氏函数

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a \dot{x}_a^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

第三定律是关于两体相互作用用的论断，你需要取 $N = 2$ 个质点组成的封闭体系讨论。

是否能证明牛顿第三定律的强形式——“作用力和反作用力大小相等、方向相反、且在一条连线上”？这里的“在一条连线上”应该理解为“作用力与反作用力的力矩之和为零”。

Solution

1.

我们先来推导惯性定律。考虑伽利略协变的单个质点的拉氏函数（老师讲义的结论）：

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

考虑空间平移对称变换：

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$$

$$L' = L$$

由诺特定理，守恒量为

$$p_\alpha \Delta q_\alpha = m \dot{\vec{x}} \cdot \vec{a}$$

故自由粒子的 $\dot{\vec{x}}$ 不随时间变化，即牛顿第一定律。

Solution

2. 对质点组拉氏函数 $L = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a \dot{x}_a^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$, 考虑空间平移准对称变换:

$$t' = t, \quad \vec{x}'_i = \vec{x}_i + \vec{a}_i$$

其中 a 为无穷小量, 由诺特定理,

$$L' = L - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \vec{a}_i$$

即

$$\Delta\varphi = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \vec{a}_i t$$

故守恒量为:

$$p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{a}_i + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} t \cdot \vec{a}_i = \sum_i (m_i \dot{\vec{x}}_i + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} t) \cdot \vec{a}_i$$

由于 $\vec{a}_i$ 的任意性知, $m_i \dot{\vec{x}}_i + \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} t$ 为守恒量, 求导得 $m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}$
即为牛顿第二定律

3.

考虑封闭的两质点系统 m_1, m_2 , 拉氏量:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 - V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

直接套用上一问的结论, $m_i \ddot{\vec{x}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}$ 。由于封闭系统, 故 $V = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$, 所以

$$\vec{F}_1 = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_2} = -\vec{F}_2$$

即为牛顿第三定律。下面证明强形式即通过证明作用力与反作用力的力矩之和为零来证明作用量与反作用力在一条连线上。

要求势能为距离的函数 $V = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ 即要求系统具有空间转动不变性, 考虑空间转动变换:

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} + \vec{\theta} \times \vec{x}$$

其中 θ 为无穷小量, 拉氏量 L' 为:

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{\vec{x}}_1^2 + (\vec{\theta} \times \dot{\vec{x}}_1)^2 \right] + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{\vec{x}}_2^2 + (\vec{\theta} \times \dot{\vec{x}}_2)^2 \right] - V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{\theta} \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)|) \\ &= L - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_1} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{x}_1) - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_2} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{x}_2) + O(\theta^2) \\ &= L + O(\theta^2) \end{aligned}$$

故 $\Delta\varphi = 0$ 即系统合力矩为零, 因此牛顿第三定律强形式成立。

7. 自由运动的慢子满足 Poincaré 不变性。请写出 Poincaré 变换对应的 10 个诺特守恒量。

Solution

庞加莱变换有十个自由度，因而十个无穷小的庞加莱变换对应着十个诺特守恒量。十个无穷小变换分别为四个时空平移和六个洛伦兹变换。

首先讨论时空平移：

自由粒子的拉氏函数为

$$L = -m\sqrt{1 - v^2}$$

广义动量

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m \vec{v}$$

广义积分

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \gamma m$$

显然时空变换下 $\Delta\varphi = 0$ ，故由诺特定理：

时间变换 $t' = t + a$ 下，守恒量为

$$H\Delta t = aH = a\gamma m$$

即 γm 能量守恒

空间变换下守恒量为

$$\vec{p} \cdot \Delta \vec{x}$$

即 $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ 动量守恒

下面讨论洛伦兹变换 Λ ：

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

设无穷小洛伦兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ ，代入上式得

$$(\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha)g_{\mu\nu}(\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

得 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ，即无穷小洛伦兹变换与恒等变换之间的差为反对称矩阵， 4×4 反对称矩阵的六个自由度（即我们分别取矩阵的右上角的六个元素只有一个元素非零的矩阵）恰对应着六种无穷小洛伦兹变换。（或者直接老师讲义中的六种洛伦兹变换直接取无穷小近似，能得到相同结果）

取六种无穷小洛伦兹变换为三个空间转动变换和 boost 变换。对于空间转动变换，以绕 x 轴转动为例：变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\theta \\ 0 & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}$$

由于洛伦兹不变性, $\Delta\varphi = 0$, 故守恒量为:

$$\vec{p} \cdot \Delta\vec{x} = p_z\theta y - p_y\theta z$$

即 x 方向角动量 $J_x = yp_z - zp_y$ 守恒。同理 J_y, J_z 也守恒。

Boost 变换以沿着 x 轴的为例, 对应的无穷小变换矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于洛伦兹不变性, $\Delta\varphi = 0$, 故守恒量为:

$$H\Delta t - \vec{p} \cdot \vec{v} = H(-\eta x) - p_x(-\eta t)$$

即沿着 x 轴的 boost $K_x = Hx - p_x t$ 为守恒量, 同理 K_y, K_z 也为守恒量

综上庞加莱变换对应的十个守恒量为: H, P_i, J_i, K_i

8. 电磁场中带电质点拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - q\phi(\vec{x}) + q\vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

考虑沿 z 轴正向的均匀静磁场,

$$\phi = 0, \quad \vec{A} = \frac{B}{2}(-ye_x + xe_y)$$

请先验证绕 z 轴的无穷小转动

$$x' = x - \epsilon y, \quad y' = y + \epsilon x, \quad z' = z,$$

是对称变换, 然后写出对应的诺特守恒量。

Solution

在该变换下拉氏量变为：

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + q\vec{A}(\vec{x}') \cdot \dot{\vec{x}}' \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + q \left[-\frac{B}{2}y'\dot{x}' + \frac{B}{2}x'\dot{y}' \right] \\ &= \frac{1}{2}m \left[(\dot{x} - \epsilon\dot{y})^2 + (\dot{y} + \epsilon\dot{x})^2 + \dot{z}^2 \right] + q \left[-\frac{B}{2}(y + \epsilon x)(\dot{x} - \epsilon\dot{y}) + \frac{B}{2}(x - \epsilon y)(\dot{y} + \epsilon\dot{x}) \right] \\ &= L + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

即题中变换为对称变换， $\varphi = 0$ 。

广义动量为：

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{B}{2}qy \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{B}{2}qx \end{aligned}$$

守恒量为：

$$\begin{aligned} p_\alpha \Delta x_\alpha &= (m\dot{x} - \frac{B}{2}qy)(-\epsilon y) + (m\dot{y} + \frac{B}{2}qx)(\epsilon x) \\ &= \epsilon \left[m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{B}{2}q(x^2 + y^2) \right] \end{aligned}$$

故守恒量为 $m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{B}{2}q(x^2 + y^2)$