

理论力学 A

作业 17 参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 11 月 25 日

共四题，选做其三

第四章对称性和守恒量

1. Lane-Emden 方程是

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0.$$

(1) 验证这个方程对应的拉氏函数是

$$L = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right).$$

(2) 证明尺度变换

$$t' = \lambda t, q'(t') = \lambda^{-\frac{1}{2}}q(t)$$

是对称变换.

(3) 推广到

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^n = 0,$$

写出对应的拉氏函数，判断是否有尺度变换（准）对称性.

(4) 求尺度变换对应的诺特守恒量 A .

(5) 计算 dA/dt ，并利用 Lane-Emden 方程验证等式 $dA/dt = 0$.

解答

(1) 验证拉氏函数

$$L = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right)$$

欧拉-拉格朗日方程为 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = t^2\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}(t^2\dot{q}) = 2t\dot{q} + t^2\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = t^2(-q^5) = -t^2q^5$$

$$2t\dot{q} + t^2\ddot{q} - (-t^2q^5) = 0 \implies t^2\ddot{q} + 2t\dot{q} + t^2q^5 = 0$$

两边除以 t^2 :

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0$$

验证完毕.

- (2) **证明对称变换**无穷小变换形式: $t' = (1 + \epsilon)t \implies \delta t = \epsilon t, \xi = t. q' = (1 - \frac{1}{2}\epsilon)q \implies \delta q = -\frac{1}{2}\epsilon q, \eta = -\frac{1}{2}q$. 判断是否满足对称性条件:

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi + \frac{\partial L}{\partial q}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{\eta} - \dot{q}\xi) + L\xi = 0$$

$$\xi = t, \quad \eta = -q/2, \quad \dot{\xi} = 1, \quad \dot{\eta} = -\dot{q}/2$$

代入 $L = \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 - \frac{1}{6}t^2q^6$:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (t\dot{q}^2 - \frac{1}{3}tq^6)t + (-t^2q^5)(-q/2) + (t^2\dot{q})(-\dot{q}/2 - \dot{q}) + (\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 - \frac{1}{6}t^2q^6) \\ &= t^2\dot{q}^2 - \frac{1}{3}t^2q^6 + \frac{1}{2}t^2q^6 - \frac{3}{2}t^2\dot{q}^2 + \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 - \frac{1}{6}t^2q^6 \\ &= (1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2})t^2\dot{q}^2 + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6})t^2q^6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

满足对称性条件.

- (3) **推广到 n 次方**方程 $\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^n = 0$ 对应的拉氏函数为:

$$L_n = t^2(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{n+1}q^{n+1})$$

尝试尺度变换 $\xi = t, \eta = \alpha q$. 代入对称性条件:

$$\begin{aligned} 0 &= (t\dot{q}^2 - \frac{2}{n+1}tq^{n+1})t + (-t^2q^n)(\alpha q) + (t^2\dot{q})(\alpha\dot{q} - \dot{q}) + (\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 - \frac{1}{n+1}t^2q^{n+1}) \\ &= t^2\dot{q}^2(1 + \alpha - 1 + \frac{1}{2}) + t^2q^{n+1}(-\frac{2}{n+1} - \alpha - \frac{1}{n+1}) \\ &= t^2\dot{q}^2(\alpha + \frac{1}{2}) + t^2q^{n+1}(-\alpha - \frac{3}{n+1}) \end{aligned}$$

要使上式恒为零, 需满足:

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{且} \quad -\alpha - \frac{3}{n+1} = 0$$

$$\alpha = -1/2 \implies \frac{1}{2} - \frac{3}{n+1} = 0 \implies n+1 = 6 \implies n = 5$$

结论: 只有当 $n = 5$ 时, 该系统才具有上述形式的尺度变换对称性.

(4) 求诺特守恒量守恒量公式 $A = L\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\eta - \dot{q}\xi)$. 对于 $n = 5, \xi = t, \eta = -q/2$.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 - \frac{1}{6}t^2q^6\right)t + (t^2\dot{q})(-q/2 - \dot{q}t) \\ &= \frac{1}{2}t^3\dot{q}^2 - \frac{1}{6}t^3q^6 - \frac{1}{2}t^2q\dot{q} - t^3\dot{q}^2 \\ &= -\frac{1}{2}t^3\dot{q}^2 - \frac{1}{6}t^3q^6 - \frac{1}{2}t^2q\dot{q} \end{aligned}$$

(5) 验证 $dA/dt = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{3}{2}t^2\dot{q}^2 - t^3\ddot{q}\dot{q} - \frac{1}{2}t^2q^6 - t^3q^5\dot{q} - (tq\dot{q} + \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2 + \frac{1}{2}t^2q\ddot{q}) \\ &= -2t^2\dot{q}^2 - t^3\ddot{q}\dot{q} - \frac{1}{2}t^2q^6 - t^3q^5\dot{q} - tq\dot{q} - \frac{1}{2}t^2q\ddot{q} \end{aligned}$$

利用方程 $\ddot{q} = -\frac{2}{t}\dot{q} - q^5$ 代入消去 $\ddot{q}$:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -2t^2\dot{q}^2 - t^3\dot{q}\left(-\frac{2}{t}\dot{q} - q^5\right) - \frac{1}{2}t^2q^6 - t^3q^5\dot{q} - tq\dot{q} - \frac{1}{2}t^2q\left(-\frac{2}{t}\dot{q} - q^5\right) \\ &= -2t^2\dot{q}^2 + 2t^2\dot{q}^2 + t^3q^5\dot{q} - \frac{1}{2}t^2q^6 - t^3q^5\dot{q} - tq\dot{q} + tq\dot{q} + \frac{1}{2}t^2q^6 \\ &= (-2 + 2)t^2\dot{q}^2 + (1 - 1)t^3q^5\dot{q} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)t^2q^6 + (-1 + 1)tq\dot{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

验证成立.

2. 设振子与阻尼器耦合, 阻力受到的阻力与速度成正比, 运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - a\dot{x}.$$

拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2) \exp\left(\frac{\alpha}{m}t\right).$$

证明无穷小变换

$$t' = t + \epsilon, \quad x' = x - \epsilon \frac{\alpha x}{2m}$$

是准对称变换, 并求出对应的诺特守恒量.

解答

证明准对称性无穷小生成元: $\xi = 1, \eta = -\frac{\alpha x}{2m}$. $L = e^{\frac{\alpha}{m}t}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2)$. 判别准对称条件: $\frac{\partial L}{\partial t}\xi + \frac{\partial L}{\partial x}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\dot{\eta} - \dot{x}\xi) + L\xi = \dot{K}$.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{\alpha}{m}L \cdot 1 + e^{\frac{\alpha}{m}t}(-kx)(-\frac{\alpha x}{2m}) + e^{\frac{\alpha}{m}t}(m\dot{x})(-\frac{\alpha \dot{x}}{2m}) + 0 \\ &= \frac{\alpha}{m}e^{\frac{\alpha}{m}t}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2) + e^{\frac{\alpha}{m}t}\frac{\alpha kx^2}{2m} - e^{\frac{\alpha}{m}t}\frac{\alpha \dot{x}^2}{2} \\ &= e^{\frac{\alpha}{m}t}(\frac{\alpha}{2}\dot{x}^2 - \frac{\alpha k}{2m}x^2 + \frac{\alpha k}{2m}x^2 - \frac{\alpha}{2}\dot{x}^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

LHS 为 0, 这意味着它是一个严格的对称变换 ($K = \text{const}$ 或 $K = 0$).

诺特守恒量

$$A = L\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\eta - \dot{x}\xi) - K$$

取 $K = 0$.

$$\begin{aligned} A &= L \cdot 1 + m\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t}(-\frac{\alpha x}{2m} - \dot{x}) \\ &= \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)e^{\frac{\alpha}{m}t} - \frac{\alpha}{2}x\dot{x}e^{\frac{\alpha}{m}t} - m\dot{x}^2e^{\frac{\alpha}{m}t} \\ &= e^{\frac{\alpha}{m}t}[-\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{\alpha}{2}x\dot{x}] \end{aligned}$$

或者写成 $A = -\frac{1}{2}e^{\frac{\alpha}{m}t}(m\dot{x}^2 + kx^2 + \alpha x\dot{x})$.

3. Goodwin 增长周期模型的拉氏函数是

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2}(\frac{\dot{v}}{v} \ln u - \frac{\dot{u}}{u} \ln v) + (\alpha + \beta - \frac{1}{\sigma}) \ln u - (\alpha + \gamma) \ln v + \frac{1}{\sigma}u + \rho v.$$

(1) 检验无穷小变换

$$t' = t, u' = \{1 + \epsilon[-(\alpha + \gamma) + \rho v]\}u, v' = \{1 + \epsilon[\frac{1}{\sigma}(1 - u) - (\alpha + \beta)]\}v$$

是否为准对称变换.

(2) 若上述变换是准对称变换, 请写出对应的诺特守恒量.

解答

(1) 检验准对称性变换对应的生成元: $\xi = 0, \eta_u = [-(\alpha + \gamma) + \rho v]u, \eta_v = [\frac{1}{\sigma}(1 - u) - (\alpha + \beta)]v$ 这实际上是直接使用了运动方程 $\dot{u} = \eta_u, \dot{v} = \eta_v$ 的形式. 即

变换是向着运动轨迹切向的变换（时间演化）。对于不显含时间 t 的拉氏量，沿真实运动轨迹的变换 $\delta q = \epsilon \dot{q}$ 总是对称变换，对应的守恒量就是广义能量（哈密顿量）。这里 $\eta_u \approx \dot{u}, \eta_v \approx \dot{v}$ 。代入准对称条件 $\frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} = \dot{K}$ 。或者直接利用性质：如果 $\xi = 0, \eta = \dot{q}$ ，则 $\delta L = \frac{dL}{dt} \epsilon$ ，所以 $K = L$ 。

让我们验证 η_u, η_v 是否就是运动方程给出的 $\dot{u}, \dot{v}$ ：题目中给出的变换式正是 Goodwin 模型的运动方程（参见作业 09）。因此，这是一个对应于时间平移不变性的对称性，即 L 不显含 t 。在这种情况下，生成元 η_i 对应于广义速度 $\dot{q}_i$ 。由此导致的拉氏量的变分是全微分 $\frac{dL}{dt}$ 。所以这是一个准对称变换，规范函数 $K = L$ 。

- (2) **诺特守恒量** 守恒量公式 $A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i - K$ （因为 $\xi = 0$ ）。这里 $\eta_u = \dot{u}, \eta_v = \dot{v}, K = L$ 。

$$A = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \dot{v} - L$$

这正是广义能量 H （或者是 $-H$ ，取决于符号定义，通常诺特流定义可能相差一个负号）。利用作业 09 的结果，该守恒量为：

$$A = -(\alpha + \beta - \frac{1}{\sigma}) \ln u + (\alpha + \gamma) \ln v - \frac{1}{\sigma} u - \rho v$$

4. “完美光具组”能够把任意一点无像差地成像在共轭点。除了平面镜之外，1854 年麦克斯韦提出的麦克斯韦鱼眼，是唯一的完美光具组。鱼眼的折射率为

$$n(\mathbf{x}) = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2}$$

上式中 r 是到坐标原点的距离，参数 $n_0 > 0, a > 0$ 。

近年来有人发现，古老的鱼眼透镜可能还与量子纠缠有关。

- (1) 请从拉氏函数验证，几何光学中的鱼眼系统具有转动对称性。
- (2) 写出转动对称对应的诺特守恒量。

解答

- (1) **验证转动对称性** 费马原理的拉氏函数（以光程为作用量，参数为弧长或某个路径参数）：

$$L = n(\mathbf{x}) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2} \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\mathbf{x}|$ 。对于空间转动变换 $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$ （ $\mathbf{R}$ 为正交矩阵），有：1. 标量 $r = |\mathbf{x}|$ 保持不变 $\implies n(r)$ 不变。2. 速度大小 $|\dot{\mathbf{x}}|$ 保持不变（因为 $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} \implies |\dot{\mathbf{x}}'|^2 = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}} = |\dot{\mathbf{x}}|^2$ ）。因此，拉氏函数 L 在转

动变换下保持形式不变，具有转动对称性.

- (2) **诺特守恒量**对于转动对称性，无穷小变换为 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{x}$ ，即 $\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{x}$. 这对应三个独立的转动（绕 x, y, z 轴）. 诺特守恒量（矢量形式）为：

$$\mathbf{J} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \times \mathbf{x}$$

计算广义动量 $\mathbf{p}$ ：

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = n(r) \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} = n(r) \hat{t} \quad (\hat{t} \text{ 为切向单位矢量})$$

守恒量为：

$$\mathbf{J} = \mathbf{p} \times \mathbf{x} = n(r)(\hat{t} \times \mathbf{x})$$

这类似于力学中的角动量守恒. 在几何光学中，这意味着光线及其动量定义的“光学角动量”沿光路守恒.

$$\mathbf{A} = \mathbf{x} \times \left(n \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \text{Const}$$