

理论力学作业 16 参考答案

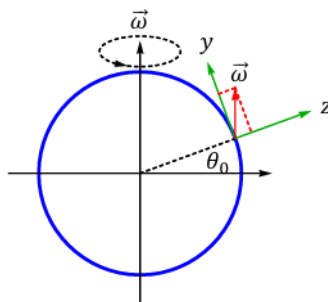
助教：张积翔、于洪飞

20.

取地表向东方向为 x 轴正向，地表向北为 y 轴，垂直地表向上为 z 轴（ENU 坐标）。地球自转角速度沿着北极方向，在 ENU 坐标中的分量是

$$\vec{\omega} = (0, \omega_0 \cos \theta_0, \omega_0 \sin \theta_0)$$

其中 θ_0 是坐标原点附近的纬度。



在重力作用下，落体运动的拉氏函数应该写成

$$L(t, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + m \dot{\vec{x}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) - mgz$$

- (1) 设广义能量为 E 。用等能条件求出 dt 与弧长 $|d\vec{x}|$ 的关系。
- (2) 用上述关系，化简哈密顿形式的莫培督原理中的约化作用量

$$W[x, y] = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{x} = \int_{z_1}^{z_2} L_{\text{eff}} \left(z, x(z), y(z), \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz} \right) dz$$

其中的泛函宗量取成轨迹

$$x = x(z), \quad y = y(z)$$

给出 L_{eff} 的表达式。

提示：阅读讲稿中的推导过程，注意 $p_a = \partial L / \partial \dot{q}_a$, $p_a \neq \partial T / \partial \dot{q}_a$ 。

- (3) 讨论物体在高处静止下落的情形， ω_0 和 $x, \frac{dx}{dz}, y, \frac{dy}{dz}$ 均为一阶小量。在拉格朗日函数 L_{eff} 中只需保留到二阶小量，写出 L_{eff} 的二阶近似表达式。

(4) 根据 (3) 的近似拉氏函数，写出落体的轨道方程。

(5) 设开始时质点静止于坐标原点，

$$x(z=0)=0, \quad y(z=0)=0, \quad E=0$$

其中 E 是广义能量。求下落高度 h 之后 ($z=-h$)，偏东的距离 $x(-h)$ 。

Solution

1. 由于拉氏量里不显含时间 t ，故广义能量 E 守恒

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot \dot{\vec{x}} - L \\ &= m\dot{\vec{x}}^2 + m\dot{\vec{x}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + m\dot{\vec{x}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) - mgz \right] \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + mgz \end{aligned}$$

即机械能（动能 + 重力势能）是运动常数。

等能条件：

$$\frac{1}{2}m \frac{|d\vec{x}|^2}{dt^2} + mgz = E$$

故

$$dt = \frac{|d\vec{x}|}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mgz)}}$$

2. 哈密顿形式的莫培督原理（等能路径）的约化作用量：

$$W = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{x}$$

其中 $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + m(\vec{\omega} \times \vec{x})$ 。

用 z 作自变量（由于我们通常考察下落情形即 $dz < 0$ ，故开根号时会产生负号）， $|d\vec{x}| = -\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} dz$ ，其中 $x' = \frac{dx}{dz}$ ， $y' = \frac{dy}{dz}$ 。等能关系化为：

$$dt = -\frac{\sqrt{1 + (x')^2 + (y')^2} dz}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - mgz)}}$$

由于 $\vec{\omega} = (0, \omega_0 \cos \theta_0, \omega_0 \sin \theta_0)$ ，动量分量为：

$$p_x = m\dot{x} + m\omega_0(\cos\theta_0 z - \sin\theta_0 y)$$

$$p_y = m\dot{y} + m\omega_0 \sin\theta_0 x$$

$$p_z = m\dot{z} - m\omega_0 \cos\theta_0 x$$

约化作用量:

$$W = \int [p_x dx + p_y dy + p_z dz] = \int_{z_1}^{z_2} [p_x x' + p_y y' + p_z] dz$$

又 $\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dz} \frac{dz}{dt} = (x', y', 1) \frac{dz}{dt}$, 有效拉格朗日量为:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} &= p_x x' + p_y y' + p_z \\ &= (m\dot{x} + m\omega_0(\cos\theta_0 z - \sin\theta_0 y)) x' + (m\dot{y} + m\omega_0 \sin\theta_0 x) y' + (m\dot{z} - m\omega_0 \cos\theta_0 x) \\ &= m(x'^2 + y'^2 + 1) \frac{dz}{dt} + m\omega_0 (\cos\theta_0 z x' - \sin\theta_0 y x' + \sin\theta_0 x y' - \cos\theta_0 x) \\ &= -\sqrt{2m(E - mgz)(1 + x'^2 + y'^2)} + m\omega_0 (\cos\theta_0 z x' - \sin\theta_0 y x' + \sin\theta_0 x y' - \cos\theta_0 x) \end{aligned}$$

3. 设 ω_0 和 x, x', y, y' 均为一阶小量, 保留到二阶小量。

根式部分展开:

$$\sqrt{2m(E - mgz)(1 + x'^2 + y'^2)} \approx \sqrt{2m(E - mgz)} \left(1 + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) \right)$$

L_{eff} 中的旋转部分有二阶项和三阶项, 略去三阶项, 即:

$$m\omega_0 (\cos\theta_0 z x' - \sin\theta_0 y x' + \sin\theta_0 x y' - \cos\theta_0 x z') \approx m\omega_0 \cos\theta_0 (x' z - x)$$

因此 L_{eff} 二阶近似为:

$$L_{\text{eff}}^{(2)} = -\sqrt{2m(E - mgz)} \left(1 + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) \right) + m\omega_0 \cos\theta_0 (x' z - x)$$

4. 从近似拉格朗日量 $L_{\text{eff}}^{(2)}$ 出发, 定义 $A(z) = \sqrt{2m(E - mgz)}$ 。

对 x 的欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x'} \right) = \frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x}$$

计算导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x'} &= -A(z)x' + m\omega_0 \cos \theta_0 z \\ \frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x} &= -m\omega_0 \cos \theta_0\end{aligned}$$

得到 x 方程:

$$\frac{d}{dz}[-A(z)x' + m\omega_0 \cos \theta_0 z] = -m\omega_0 \cos \theta_0$$

对 y 的欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y'} \right) = \frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y}$$

计算导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y'} &= -A(z)y' \\ \frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

得到 y 方程:

$$\frac{d}{dz}[A(z)y'] = 0$$

5. 初始条件: $x(0) = 0, y(0) = 0, E = 0$ 。

由 $E = 0$ 得 $A(z) = \sqrt{-2m^2gz}$ ($z < 0$)。

x 对应的欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dz}[-A(z)x' + m\omega_0 \cos \theta_0 z] = -m\omega_0 \cos \theta_0$$

化为:

$$-\frac{d}{dz}\sqrt{-2m^2gz}x' = -2m\omega_0 \cos \theta_0$$

积分一次:

$$\sqrt{-2m^2gz}x' = 2m\omega_0 \cos \theta_0 z + C$$

由初始条件 $z = 0$, 得 $C = 0$, 所以:

$$\sqrt{-2m^2gz}x' = 2m\omega_0 \cos \theta_0 z$$

$$x' = \frac{dx}{dz} = -\omega_0 \cos \theta_0 \sqrt{-\frac{2z}{g}}$$

Solution

积分得：

$$\begin{aligned} x(-h) &= -\omega_0 \cos \theta_0 \int_0^{-h} \sqrt{-\frac{2z}{g}} dz \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \omega_0 \cos \theta_0 \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}} \end{aligned}$$

21.

均匀弹簧固定在天花板上，弹簧下悬一重物。只考虑垂直方向的运动，记弹簧的偏移为

$$\psi(x, t), \quad x \in [0, a]$$

重物的坐标是

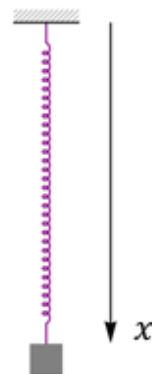
$$\psi(a, t) + a$$

设弹簧线密度为 ρ ，单位长度的弹性系数为 E ，重物质量是 m 。

(1) 写出作用量 $S[\psi]$ 。

(2) 利用哈密顿原理求出拉格朗日方程和自然边界条件。

(3) 所得的自然边界条件，即重物的运动方程。这个自然边界条件是否与牛顿第二定律一致？



Solution

1. 系统的动能包括弹簧动能和重物动能：

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \psi(a, t)}{\partial t} \right)^2$$

势能包括弹簧弹性势能和重物重力势能)：

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a E \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx - mg(\psi(a, t) + a)$$

于是作用量为：

$$S[\psi] = \int_{t_1}^{t_2} [T - U] dt$$

即

$$S[\psi] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \rho (\partial_t \psi)^2 - E (\partial_x \psi)^2 dx + \frac{1}{2} m (\partial_t \psi(a, t))^2 + mg(\psi(a, t) + a) \right\} dt$$

2. 记

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\rho(\partial_t \psi)^2 - E(\partial_x \psi)^2)$$

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^a \rho(\partial_t \psi)^2 - E(\partial_x \psi)^2 dx \right\} dt$$

$$S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} m(\partial_t \psi(a, t))^2 + mg(\psi(a, t) + a) \right\} dt$$

则作用量变分为:

$$\delta S_1 = \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \mathcal{L})} \delta \psi dt \right) \Big|_{x=0}^{x=a} + \iint dt dx \delta \psi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi)} \right)$$

计算各偏导数:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = \rho \partial_t \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi)} = -E \partial_x \psi$$

代入得:

$$\delta S_1 = \left(\int_{t_1}^{t_2} (-E \partial_x \psi) \delta \psi dt \right) \Big|_{x=0}^{x=a} + \iint dt dx \delta \psi \left(0 - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \partial_t \psi) - \frac{\partial}{\partial x} (-E \partial_x \psi) \right)$$

$$\delta S_1 = - \int_{t_1}^{t_2} E \partial_x \psi(a, t) \delta \psi(a, t) dt + \iint dt dx \delta \psi (-\rho \partial_t^2 \psi + E \partial_x^2 \psi)$$

现在计算 δS_2 :

$$\delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} [m \partial_t \psi(a, t) \delta(\partial_t \psi(a, t)) + mg \delta \psi(a, t)] dt$$

对时间项分部积分:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \partial_t \psi(a, t) \delta(\partial_t \psi(a, t)) dt = - \int_{t_1}^{t_2} m \partial_t^2 \psi(a, t) \delta \psi(a, t) dt$$

所以:

$$\delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} [-m \partial_t^2 \psi(a, t) + mg] \delta \psi(a, t) dt$$

总变分 $\delta S = \delta S_1 + \delta S_2$:

$$\delta S = \iint dt dx \delta \psi (-\rho \partial_t^2 \psi + E \partial_x^2 \psi) + \int_{t_1}^{t_2} [-E \partial_x \psi(a, t) - m \partial_t^2 \psi(a, t) + mg] \delta \psi(a, t) dt$$

由 $\delta S = 0$ 得:

拉格朗日方程 ($0 < x < a$):

$$\rho \partial_t^2 \psi - E \partial_x^2 \psi = 0$$

Solution

边界条件:

$$x = 0: \quad \psi(0, t) = 0 \quad (\text{固定端})$$

$$x = a: \quad E\partial_x\psi(a, t) + m\partial_t^2\psi(a, t) - mg = 0 \quad (\text{自然边界条件})$$

3. 自然边界条件:

$$m\partial_t^2\psi(a, t) = -E\partial_x\psi(a, t) + mg$$

即

$$ma = F_{\text{elastic}} + F_{\text{gravity}}$$

与牛顿第二定律一致

22.

考虑例题中的一维弹性棒, 假设棒的两端是自由的。

(1) 求驻波解 $u_n(x)$ 和自然频率 ω_n 。

(2) 已知初始条件

$$\begin{cases} \psi(x, t=0) = \eta(x) \\ (\partial_t\psi)|_{t=0} = \xi(x) \end{cases}$$

求 $\psi(x, t)$ 。

Solution

1. 例题中一维棒所满足的拉格朗日方程和边界条件分别为:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}|_{x=l} = 0$$

分离变量, 设

$$\psi(x, t) = u(x)q(t)$$

代入拉格朗日方程得:

$$\rho u(x)\ddot{q}(t) - Eq(t)u''(x) = 0$$

整理得:

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{E}{\rho} \frac{u''(x)}{u(x)}$$

令上式等于常数 $-\omega^2$, 得到两个常微分方程:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$$

$$u''(x) + \frac{\rho}{E} \omega^2 u(x) = 0$$

令 $k^2 = \frac{\rho}{E} \omega^2$, 则空间方程为:

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0$$

通解为:

$$u(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

代入边界条件:

$$u'(0) = -Ak \sin 0 + Bk \cos 0 = Bk = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$u'(l) = -Ak \sin kl = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin kl = 0$$

所以:

$$kl = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

即自然频率 ω_n 为:

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} k_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

相应的本征函数 (即驻波解) 为:

$$u_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

时间部分的解为:

$$q_n(t) = C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)$$

驻波解还可以为常数 u_0 , 此时 $\omega = 0$, 对应的时间部分为 $q_0 = a + bt$

因此通解为:

$$\psi(x, t) = a + bt + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)] \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2.

已知初始条件:

$$\psi(x, 0) = \eta(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = \xi(x)$$

通解形式为:

$$\psi(x, t) = a + bt + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)] \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Solution

其中 $\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 。

代入初始条件确定系数：

在 $t = 0$ 时：

$$\psi(x, 0) = a + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \eta(x)$$

利用正交性：

$$a = \frac{1}{l} \int_0^l \eta(x) dx, \quad C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \eta(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

对时间求偏导：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = b + \sum_{n=1}^{\infty} [-\omega_n C_n \sin(\omega_n t) + \omega_n D_n \cos(\omega_n t)] \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

在 $t = 0$ 时：

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, 0) = b + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \xi(x)$$

利用正交性：

$$b = \frac{1}{l} \int_0^l \xi(x) dx, \quad D_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \xi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

因此最终解为：

$$\psi(x, t) = a + bt + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)] \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中系数：

$$a = \frac{1}{l} \int_0^l \eta(x) dx, \quad b = \frac{1}{l} \int_0^l \xi(x) dx,$$
$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \eta(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad D_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l \xi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$