

理论力学 A

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

作业 15 参考答案

日期：2025 年 11 月 25 日

第三章变分法与最小作用量原理

15. (Ritz 变分) 质点处于重力场中, 以向上为 y -轴正方向, 设其运动规律为

$$x(t) = a + bt + ct^2, y(t) = d + et + ft^2$$

求系统的作用量在积分后得到的显式表达式 $S(a, b, c, d, e, f)$, 然后利用 Hamilton 原理求待定系数.

提示：对照讲义的例题，应用哈密顿原理时需注意使用的正确边界条件.

解答

质点的拉格朗日量为：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

代入试探函数：

$$\dot{x}(t) = b + 2ct$$

$$\dot{y}(t) = e + 2ft$$

$$L(t) = \frac{1}{2}m[(b + 2ct)^2 + (e + 2ft)^2] - mg(d + et + ft^2)$$

$$L(t) = \frac{1}{2}m(b^2 + 4bct + 4c^2t^2 + e^2 + 4eft + 4f^2t^2) - mgd - mget - mgft^2$$

$$L(t) = m(2c^2 + 2f^2 - gf)t^2 + m(2bc + 2ef - ge)t + \frac{1}{2}m(b^2 + e^2 - 2gd)$$

作用量 $S = \int_0^T L dt$ ：

$$\begin{aligned} \frac{S(a, b, c, d, e, f)}{m} &= \frac{1}{3}(2c^2 + 2f^2 - gf)T^3 \\ &+ \frac{1}{2}(2bc + 2ef - ge)T^2 + \frac{1}{2}(b^2 + e^2 - 2gd)T \end{aligned}$$

根据 Hamilton 原理, $\delta S = 0$. 我们需要指定边界条件. 例如, 如果我们固定了 $t = 0$ 和 $t = T$ 时的位置:

$$x(0) = a = x_1$$

$$y(0) = d = y_1$$

$$x(T) = a + bT + cT^2 = x_2$$

$$y(T) = d + eT + fT^2 = y_2$$

这 4 个边界条件是约束条件. 我们将 S 视为 b, c, e, f 的函数 (a, d 已被 x_1, y_1 固定), 求解 $\frac{\partial S}{\partial b} = 0, \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \frac{\partial S}{\partial e} = 0, \frac{\partial S}{\partial f} = 0$ 和 4 个约束条件组成的方程组, 即可确定所有系数.

16. 粒子在中心势中作平面运动, 拉格朗日函数是

$$L = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r^2}$$

我们把时间参数 t 和空间坐标 (r, θ) 替换为新的“时间”参数 τ 和“空间”坐标 (u, v) , 即定义新的时空参数:

$$\tau = \theta, \quad u = \frac{1}{r}, \quad v = t.$$

(1) 给出新时空参数下的拉格朗日函数 $\tilde{L}(\tau, u, v, \dot{u}, \dot{v})$, 其中

$$\tilde{L}d\tau = Ldt.$$

(2) 写出广义动量

$$p_u = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}}, \quad p_v = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{v}},$$

其中加点表示对 τ 的微商.

(3) 写出广义能量

$$\tilde{H} = p_u \dot{u} + p_v \dot{v} - \tilde{L}.$$

(4) 利用两个首次积分

$$p_v = -E, \quad \tilde{H} = -J$$

解出 $\dot{u}$.

(5) 对 $\dot{u}$ 积分, 求出 $u(\tau)$.

解答

(1) 新拉格朗日函数

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d(1/u)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left(-\frac{1}{u^2} \dot{u} \right) \dot{\tau} = -\frac{\dot{u}}{u^2} \frac{1}{\dot{v}}$$

$$r = 1/u, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\dot{v}}$$

$$L = \frac{1}{2}m \left[\left(-\frac{\dot{u}}{u^2 \dot{v}} \right)^2 + \left(\frac{1}{u} \right)^2 \left(\frac{1}{\dot{v}} \right)^2 \right] - \alpha u^2$$

$$L = \frac{1}{2}m \frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4 \dot{v}^2} - \alpha u^2$$

根据 $\tilde{L}d\tau = Ldt \implies \tilde{L} = L\frac{dt}{d\tau} = L\dot{v}$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4\dot{v}} - \alpha u^2\dot{v}$$

(2) 广义动量

$$p_u = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{2}m\frac{2\dot{u}}{u^4\dot{v}} = \frac{m\dot{u}}{\dot{v}u^4}$$

$$p_v = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{v}} = -\frac{1}{2}m\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4\dot{v}^2} - \alpha u^2$$

(3) 广义能量

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= p_u\dot{u} + p_v\dot{v} - \tilde{L} \\ &= \left(\frac{m\dot{u}^2}{\dot{v}u^4}\right) + \left(-\frac{1}{2}m\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4\dot{v}} - \alpha u^2\dot{v}\right) - \left(\frac{1}{2}m\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4\dot{v}} - \alpha u^2\dot{v}\right) \\ &= \frac{m\dot{u}^2}{\dot{v}u^4} - m\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4\dot{v}} = \frac{m\dot{u}^2 - m\dot{u}^2 - mu^2}{u^4\dot{v}} \\ &= -\frac{m}{\dot{v}u^2}.\end{aligned}$$

(4) 解出 $\dot{u}$ $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \frac{m}{u^2\dot{v}} = J$ (角动量). 由 (3) 可知 $\tilde{H} = -Ju^2$. 同时, 因为 v 是循环坐标, $p_v = -E$ (能量) 是守恒量.

$$\begin{aligned}p_v &= -\frac{1}{2}m\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4\dot{v}^2} - \alpha u^2 = -E \\ -E &= -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{u^2\dot{v}}\right)\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^2} - \alpha u^2 = -\frac{1}{2}J\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^2} - \alpha u^2 \\ E &= \frac{J}{2u^2}(\dot{u}^2 + u^2) + \alpha u^2 \implies \frac{2(E - \alpha u^2)}{J} = \frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^2} \\ \dot{u}^2 &= u^2\left(\frac{2(E - \alpha u^2)}{J} - 1\right) = \frac{2Eu^2}{J} - \frac{2\alpha u^4}{J} - u^2 = \frac{2Eu^2 - Ju^2 - 2\alpha u^4}{J}\end{aligned}$$

$$p_v = -\frac{1}{2}(p_u\dot{v}u^4)\frac{\dot{u}}{u^4\dot{v}^2} - \frac{1}{2}m\frac{u^2}{u^4\dot{v}^2} - \alpha u^2 = -E$$

使用 $\tilde{H} = -J$ 和 $p_v = -E$:

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= -\frac{m}{\dot{v}u^2} = -J \implies \dot{v} = \frac{m}{Ju^2} \\ p_v &= -\frac{1}{2}m\frac{\dot{u}^2 + u^2}{u^4\dot{v}^2} - \alpha u^2 = -E \\ \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + u^2)\frac{1}{u^4\left(\frac{m}{Ju^2}\right)^2} + \alpha u^2 &= E \\ \implies \dot{u} &= \sqrt{\frac{2mE}{J^2} - \left(1 + \frac{2m\alpha}{J^2}\right)u^2}\end{aligned}$$

(5) 解 $u(\tau)$ 这是一个 $\dot{u} = \sqrt{A - Bu^2}$ 形式的方程, 其解为简谐振动:

$$u(\tau) = \sqrt{\frac{A}{B}} \sin(\sqrt{B}(\tau + \tau_0))$$

其中 $A = \frac{2mE}{J^2}$, $B = 1 + \frac{2m\alpha}{J^2}$:

$$u(\tau) = \sqrt{\frac{2mE}{J^2 + 2m\alpha}} \sin \left[\sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{J^2}} (\tau + \tau_0) \right].$$

以下两题选做其一

17. 在黑洞的视界上方, 作为一个极简的模型, 我们把表观光速近似取为

$$v(x, y) = \alpha y$$

其中 x -轴为视界切向, y -轴为视界面的法向.

利用费马原理求光线的轨迹.

解答

费马原理: 光线走时间最短的路径. $T = \int dt = \int \frac{ds}{v(x, y)}$.

$$T[x(y)] = \int \frac{\sqrt{1+x'^2}}{v(y)} dy = \int \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\alpha y} dy$$

$$L(y, x') = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\alpha y}$$

由于 L 不显含 x , 欧拉-拉格朗日方程有首次积分 (Beltrami 恒等式):

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \text{const} = C$$

$$\frac{1}{\alpha y} \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = C$$

$$x' = \frac{dy}{dx} = C\alpha y \sqrt{1+x'^2} \implies x'^2 = C^2 \alpha^2 y^2 (1+x'^2)$$

$$x'^2 (1 - C^2 \alpha^2 y^2) = C^2 \alpha^2 y^2$$

$$x'^2 = \frac{C^2 \alpha^2 y^2}{1 - C^2 \alpha^2 y^2} \implies \frac{dx}{dy} = \frac{C\alpha y}{\sqrt{1 - C^2 \alpha^2 y^2}}$$

$$x = \int \frac{C\alpha y}{\sqrt{1 - C^2 \alpha^2 y^2}} dy$$

令 $u = 1 - C^2\alpha^2y^2$, $du = -2C^2\alpha^2ydy$.

$$x = -\frac{1}{2C\alpha} \int u^{-1/2} du = -\frac{1}{C\alpha} \sqrt{u} + C_2 = -\frac{1}{C\alpha} \sqrt{1 - C^2\alpha^2y^2} + C_2$$

$$(x - C_2)^2 = \frac{1}{C^2\alpha^2} (1 - C^2\alpha^2y^2)$$

$$(x - C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C^2\alpha^2}$$

光线的轨迹是圆.

18. 设在阳光暴晒下, 马路上方空气折射率随高度 y 的变化规律为

$$n(y) = n_0(1 + Ay).$$

(1) 利用费马原理, 写出光线满足的微分方程.

(2) 一人站在马路上向前看, 能看到多远? 设此人眼睛离地面高度为 1.6m.

解答

(1) 费马原理 $T = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{n(y)}{c} ds$. 最小化 T 等价于最小化 $\int n(y) ds$.

$$S[x(y)] = \int n(y) \sqrt{1 + x'^2} dy = \int n_0(1 + Ay) \sqrt{1 + x'^2} dy$$

$$L(y, x') = n_0(1 + Ay) \sqrt{1 + x'^2}$$

L 不显含 x , 因此 $\frac{\partial L}{\partial x'} = \text{const} = C$.

$$n_0(1 + Ay) \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = C$$

$$(1 + Ay)^2 x'^2 = \frac{C^2}{n_0^2} (1 + x'^2) \implies x'^2 \left((1 + Ay)^2 - \frac{C^2}{n_0^2} \right) = \frac{C^2}{n_0^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{C/n_0}{\sqrt{(1 + Ay)^2 - C^2/n_0^2}}$$

这就是光线满足的微分方程.

(2) 人能看到最远的点是光线从该点水平射出 ($y' = 0$ 或 $dx/dy \rightarrow \infty$) 到达人眼. 当 $dx/dy \rightarrow \infty$ 时, 分母为 0:

$$(1 + Ay_m)^2 - C^2/n_0^2 = 0 \implies C/n_0 = 1 + Ay_m$$

其中 y_m 是光线的最低点高度 ($y_m = 0$) . 所以 $C/n_0 = 1$. 微分方程变为:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1+Ay)^2 - 1}}$$

人眼在 $(x_e, y_e) = (0, 1.6m)$. 光线从 $(x_s, 0)$ 发出.

$$x_s = \int_0^{1.6} \frac{dy}{\sqrt{(1+Ay)^2 - 1}}$$

令 $u = 1 + Ay$, $du = A dy$.

$$x_s = \frac{1}{A} \int_1^{1+A(1.6)} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{1}{A} [\operatorname{arccosh}(u)]_1^{1+A(1.6)}$$

$$x_s = \frac{1}{A} (\operatorname{arccosh}(1 + 1.6A) - \operatorname{arccosh}(1)) = \frac{1}{A} \operatorname{arccosh}(1 + 1.6A)$$

由于 $A = 0.8 \times 10^{-6}$ 非常小, $\operatorname{arccosh}(1+z) \approx \sqrt{2z}$.

$$x_s \approx \frac{1}{A} \sqrt{2(1.6A)} = \frac{\sqrt{3.2A}}{A} = \sqrt{\frac{3.2}{A}} = \sqrt{\frac{3.2}{0.8 \times 10^{-6}}} = \sqrt{4 \times 10^6} = 2000\text{m}$$

能看到 2000 米远.

19. 在重力作用下, 初速为 v 的质点从垂直高度为 h 的 A 点出发, 落到水平距离为 w 的地面 B 点, 在此期间质点与地面发生过一次弹性碰撞.

- (1) 以 $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ 为广义坐标, 写出 Jacobi 形式的莫培督原理中的度规矩阵 $g_{\alpha\beta}(x, y)$ 和约化作用量 $W[x, y]$.
- (2) 在作用量泛函中消去形式参数 λ , 把轨迹表示为 $y = y(x)$, 求出作用量 $W[y] = \int_0^w L(x, y, y') dx$.
- (3) 弹性碰撞点 C 是角点, 我们需要把作用量泛函写成分段积分形式,

$$W = \int_0^{x_C} L(x, y, y') dx + \int_{x_C}^w L(x, y, y') dx,$$

其中 C 点的横坐标 x_C 可变, 纵坐标

$$y_C = 0 \implies \Delta y_C = 0,$$

利用莫培督原理 $\delta W[y] = 0$, 给出欧拉-拉格朗日方程和角点条件.

- (4) 解出轨迹 $y = y(x)$.

解答

(1) 作用量

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

能量

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

线元

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

莫培督原理的作用量

$$W = \int \sqrt{2(E - V)} ds = \int \sqrt{2(E - mgy)} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Jacobi 度规 $g_{\alpha\beta}$ 定义自 $W = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta}$.

$$g_{\alpha\beta} = 2(E - V)\delta_{\alpha\beta} = 2m(E/m - gy)\delta_{\alpha\beta} = m(v^2 + 2gh - 2gy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

约化作用量为:

$$W[x, y] = \int_A^B \sqrt{2m(E - mgy)} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$W[x, y] = m \int_A^B \sqrt{v^2 + 2gh - 2gy} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

(2) 令 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$.

$$W[y] = m \int_0^w \sqrt{v^2 + 2gh - 2gy} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

被积函数 $L(y, y') = m\sqrt{(v^2 + 2gh - 2gy)(1 + y'^2)}$.

(3)

$$L = \sqrt{(v^2 + 2gh - 2gy)(1 + y'^2)}$$

 L 不显含 x , 因此有首次积分 (Beltrami 恒等式):

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C \quad (\text{Const})$$

$$\sqrt{(v^2 + 2gh - 2gy)(1 + y'^2)} - y' \frac{\sqrt{v^2 + 2gh - 2gy} \cdot y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

$$\frac{(v^2 + 2gh - 2gy)(1 + y'^2) - (v^2 + 2gh - 2gy)y'^2}{\sqrt{(v^2 + 2gh - 2gy)(1 + y'^2)}} \frac{1}{L} = C$$

$$\frac{v^2 + 2gh - 2gy}{\sqrt{(v^2 + 2gh - 2gy)(1 + y'^2)}} = C \implies \sqrt{\frac{v^2 + 2gh - 2gy}{1 + y'^2}} = C$$

这就是欧拉-拉格朗日方程.

角点条件: $W = \int_0^{x_C} L dx + \int_{x_C}^w L dx$. 变分 $\delta W = 0$ 给出角点条件:

$$[L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}]_{x_C^-} - [L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}]_{x_C^+} + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x_C^-} \delta y_C - \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x_C^+} \delta y_C = 0$$

由于 $\delta y_C = 0$, 我们只需考虑 x_C 的变分:

$$[L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}]_{x_C^-} = [L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}]_{x_C^+}$$

$$C(x_C^-) = C(x_C^+)$$

这说明 Beltrami 积分 C 在角点两侧是连续的.

$$\sqrt{\frac{v^2 + 2gh - 2gy_c}{1 + (y'_{C-})^2}} = \sqrt{\frac{v^2 + 2gh - 2gy_c}{1 + (y'_{C+})^2}}$$

$$1 + (y'_{C-})^2 = 1 + (y'_{C+})^2 \implies (y'_{C-})^2 = (y'_{C+})^2$$

由于弹性碰撞, $y'_{C+} = -y'_{C-}$.

(4) 从 $C = \sqrt{\frac{v^2 + 2gh - 2gy}{1 + y'^2}}$ 开始:

$$C^2 = \frac{v^2 + 2gh - 2gy}{1 + y'^2} \implies 1 + y'^2 = \frac{v^2 + 2gh - 2gy}{C^2}$$

$$y'^2 = \frac{v^2 + 2gh - 2gy}{C^2} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{v^2 + 2gh - 2gy}{C^2} - 1}$$

设 A 点的初速度 v 与水平夹角为 θ_0 . $y(0) = h, y'(0) = \tan \theta_0$.

$$C^2 = \frac{v^2 + 2gh - 2gh}{1 + \tan^2 \theta_0} = \frac{v^2}{\sec^2 \theta_0} = v^2 \cos^2 \theta_0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{v^2 + 2gh - 2gy}{v^2 \cos^2 \theta_0} - 1}$$

这是一个可分离变量的方程, 积分可得 $x(y)$, 其解为抛物线.