

理论力学作业 14 参考答案

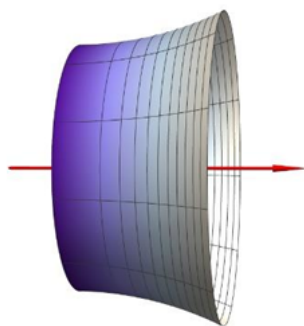
助教：张积翔、于洪飞

第 10-13 题选做其二，第 14 题必做：

10.

考虑 xy -平面上的两个固定点 A 、 B ，用一条曲线 $y = y(x)$ 连接两点，然后将曲线绕 x 轴旋转一周得到旋转曲面。

1. 写出旋转曲面的面积 $S[y]$ ，求面积最小的形状。
2. $\delta S[y] = 0$ 确定的极值曲面，默认了母线 $y(x)$ 不是多值函数且没有角点，这有可能导致漏解。如果母线在两端有一段是垂直于对称轴（这时母线是多值函数）线段，那么极小曲面的形状是什么样的？



Solution

旋转曲面的面积表达式为：

$$S[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

设被积函数为：

$$F(y, y') = y \sqrt{1 + (y')^2}.$$

对应的 Euler-Lagrange 方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0$$

方程较为复杂，考虑用广义能量化简问题。由于 F 不显含 x ，故广义能量守恒：

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C,$$

代入 F 及其偏导，解得：

$$-\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C$$

即：

$$(y')^2 = \frac{y^2}{C^2} - 1$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}} = \pm dx.$$

令 $y = C \cosh t$ ，则 $dy = C \sinh t dt$ ，($\pm$ 号融入常数 C 中)，代入得：

$$\frac{C \sinh t dt}{\sinh t} = C dt = dx \Rightarrow x = Ct + a.$$

$$y = C \cosh \left(\frac{x - a}{C} \right).$$

因此面积最小的旋转曲面形状为悬链面，其母线为悬链线，式中常数由固定端点决定。

2、

若考虑母线在左端即 $x = x_1$ 处垂直于对称轴且 $y(x_1)$ 从 y_1 到 y_3 ，母线在右端即 $x = x_2$ 处垂直于对称轴且 $y(x_2)$ 从 y_2 到 y_4 ，连接左右端的曲线从 (x_1, y_3) 到 (x_2, y_4) 相连，则面积泛函为：

$$S[y] = \pi(y_1^2 - y_3^2) + \pi(y_2^2 - y_4^2) + 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

由边界函数值不固定的变分得：

$$\delta S = -2\pi y_3 \delta y_3 - 2\pi y_4 \delta y_4 + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0$$

从而有边界条件：

$$2\pi y_3 + \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0$$

$$2\pi y_4 + \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_2} = 0$$

Solution

和欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

由边界条件方程解得 $y_3 = y_4 = 0$ ，而欧拉方程的解我们知道是悬链线。

但是在这种情形下，旋转曲面形状在左右端点均为垂直于对称轴的圆盘，所以显然连接左右端点的中间部分应当为 $y = 0$ 面积最小（让我们重新审视欧拉方程， $y = 0$ 确实为其解，这是因为我们解得悬链线时默认了广义能量不为零）。

综上，当我们考虑母线两端均有一段垂直于对称轴时，极值曲面“塌缩”为两个分立的圆盘，只需将两个圆盘的面积和悬链线围出的面积比较即可得到全局最小曲面。

11.

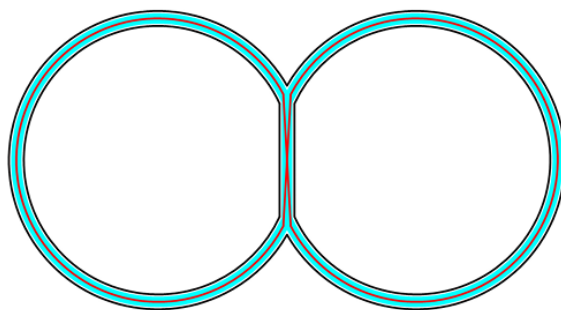
英国物理学家 P.A.M. Dirac 预言的磁单极子（monopole），带有磁荷（magnetic charge）

$$g = n \frac{hc}{2e}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

可以用超导线圈探测磁单极子。由于超导线圈完全抗磁，磁单极子穿过超导线圈后，线圈中会留下永久电流；磁单极子从线圈外穿过，则不会产生稳定的电流。通常使用量子超导干涉仪（SQUID）来检测超导线圈中的微小电流。

环形超导线圈抗干扰能力弱，环境磁场的扰动（扰动后稳定较长时间）同样能在线圈中产生电流，产生虚假信号。IBM 改进后的超导线圈，形状为对称“8”字形，环境磁场的均匀改变，在线圈的两个区域内磁通相反，不会引起线圈中的电流变化。

线圈必须放在装有液氮的管中以保持低温。管道越长，耗电越多。为了节省长期运行费用，我们需要用最短的管子围出最大的面积。请设计“8”字形管的最佳形状。



Solution

以图形的中心为原点建立直角坐标系，由于对称性我们只需考虑第一象限。曲线分为两段，一段为 $x=0$ 处垂直于 x 轴的垂线并记最高点为 $y(0) = y_0$ ，一段则为弧线并记 $y(x_2) = 0$ 。

设管子长度恒定，注意管子中间部分被左右两侧共用，故记 $\frac{y_0}{2} + s = L$ 为常数，其中 L 为总长度的四分之一， $s = \int_0^{x_2} \sqrt{1+y'^2} dx$ 为第一象限圆弧长度。

第一象限的面积泛函为：

$$S[y] = \int_0^{x_2} y dx$$

定义拓展泛函为：

$$\Psi = S + \lambda L = \frac{\lambda y_0}{2} + \int_0^{x_2} (y + \lambda \sqrt{1+y'^2}) dx$$

记 $F = y + \lambda \sqrt{1+y'^2}$ ，对拓展泛函进行变分，应注意右端边界 x_2 不固定，变分为边界有约束的可动边界变分：

$$\delta \Psi = \frac{\lambda \delta y_0}{2} + \left[(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \Delta y \right] \Big|_0^{x_2} + \int_0^{x_2} (\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}) \delta y dx = 0$$

即

$$\delta \Psi = \frac{\lambda \delta y_0}{2} + (F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}) \Big|_{x_2} \Delta x_2 - \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=0} \delta y_0 + \int_0^{x_2} (\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}) \delta y dx = 0$$

我们得到如下方程：

在 $x=0$ 处，

$$\frac{\lambda}{2} - \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=0} = 0$$

代入 $\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ ，得

$$y'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

在 $x = x_2$ 处，

$$(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}) \Big|_{x_2} = 0$$

即 $\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ ，因此我们取

$$y' \Big|_{x_2} = -\infty$$

表明在 x_2 处曲线垂直于 x 轴。

由欧拉-拉格朗日方程：

$$1 - \frac{d}{dx} \left[\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0$$

Solution

故

$$\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x + C$$

由于我们在上面解得 $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 代入得 $C = -\frac{\lambda}{2}$ 令:

$$u = x - \frac{\lambda}{2}, \quad k = \frac{1}{\lambda}$$

则 (2) 式化为:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = ku$$

两边平方:

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = k^2 u^2$$

$$y'^2 = \frac{k^2 u^2}{1 - k^2 u^2}$$

由于曲线下降, 取负号:

$$y' = -\frac{ku}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$$

积分求 y :

$$y = \int -\frac{ku}{\sqrt{1 - k^2 u^2}} du = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 u^2} + a$$

即:

$$y = \sqrt{\lambda^2 - (x - \frac{\lambda}{2})^2} + a$$

故弧线为圆弧。代入 $x = 0$ 时 $y = y_0$ 和 $x = x_2$ 时 $y=0$ 且弧线与 x 轴垂直, 得 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, a = 0$, 所以弧线方程为

$$(x - \frac{y_0}{\sqrt{3}})^2 + y^2 = \frac{4}{3}y_0^2$$

再由管子长度恒定, $\frac{y_0}{2} + s = L$, $s = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}y_0$, 得 $y_0 = \frac{L}{\frac{1}{2} + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$

综上, 最佳形状为: $y_0 = \frac{L}{\frac{1}{2} + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$, 弧线为圆弧且圆心位于 $(\frac{y_0}{\sqrt{3}}, 0)$ 半径为 $\frac{2}{\sqrt{3}}y_0$

12.

在 1489 年-1490 年, 意大利的达芬奇 (Leonardo da Vinci) 创作了名画《抱银貂的女子》(Lady with an Ermine)。这期间他思考过一个问题: 固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 那么项链所形成的曲线是什么?

这是悬链线问题。达芬奇未能得到正确的形状，直到约翰·伯努利在 1696 年以此问题向欧洲的数学家们发起公开挑战。

考虑项链上串着一个坠子的情形：均匀链子上穿着一个小重物，重物可在绳子上自由滑动。固定链子的两端，求此悬链形状满足的方程和边界条件。

Solution

本题为有约束的、有角点的泛函问题：

链子势能：

$$U_{\text{chain}} = \rho g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

设重物 m 位于 $x = c$ 处重物势能：

$$U_{\text{mass}} = mg y(c)$$

总势能泛函：

$$U[y] = \rho g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx + mg y(c)$$

约束条件（链长固定）：

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = L$$

引入拉格朗日乘子 λ ，构造泛函：

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\rho g y \sqrt{1 + (y')^2} + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} \right] dx + mg y(c)$$

记：

$$F(y, y') = (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + (y')^2}$$

故泛函变分为（注意角点 $x=c$ ，参考讲义关于带角点泛函的变分）：

$$\begin{aligned} \delta J[y] = & - \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \Big|_{c^-}^{c^+} \Delta c + \left(- \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{c^-} + mg \right) \Delta y(c) + \int_{x_1}^c \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx \\ & + \int_c^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx \end{aligned}$$

由此我们得到分段的欧拉方程，以及在点 $x=c$ 处致极曲线满足的 Weierstrass-Erdmann 角点条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{c^+} - \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{c^-} &= mg \\ \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \Big|_{c^-} &= \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \Big|_{c^+} \end{aligned}$$

Solution

代入 F 的形式 $F(y, y') = (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + (y')^2}$, 得

$$(\rho g y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \Big|_{c^+} - (\rho g y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \Big|_{c^-} = mg$$

$$\frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{c^-} = \frac{\rho g y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} \Big|_{c^+}$$

由于角点 c 两侧的 y 连续, 故由第二个角点条件只 $y'|_{c^+} = -y'|_{c^-}$ 由于 F 不显含 x, 故广义能量守恒:

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = -\frac{\rho g f + \lambda}{\sqrt{1 + f'^2}} = -C$$

C 为常数, 故第一个角点条件可写为:

$$y'|_{c^+} - y'|_{c^-} = \frac{mg}{C}$$

故角点两侧的边界条件为

$$y'|_{c^-} = \frac{mg}{2C} = -y'|_{c^+}$$

在角点两侧曲线满足欧拉拉格朗日方程, 为了简便, 我们采用广义能量来解曲线方程:

$$\frac{\rho g f + \lambda}{\sqrt{1 + f'^2}} = C$$

$$y' = \pm \sqrt{\left(\frac{\rho g y + \lambda}{C}\right)^2 - 1}$$

令 $u = \rho g y + \lambda$, $du = \rho g dy$:

$$dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{\frac{u^2}{C^2} - 1}} = \pm \frac{C}{\rho g} \frac{du}{\sqrt{u^2 - C^2}}$$

积分:

$$x + c_2 = \pm \frac{C}{\rho g} \ln \left(u + \sqrt{u^2 - C^2} \right)$$

即:

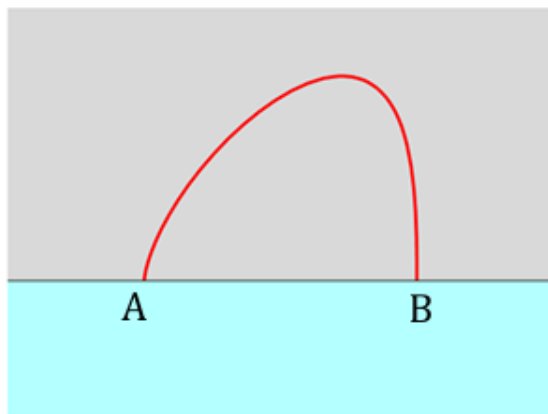
$$x + c_2 = \pm \frac{C}{\rho g} \ln \left(\rho g y + \lambda + \sqrt{(\rho g y + \lambda)^2 - C^2} \right)$$

可化为悬链线形式 $y = \frac{1}{a} \cosh(ax + b) + y_0$ 。

综上, 角点两侧均为悬链线, 角点两侧的边界条件为 $y'|_{c^-} = \frac{mg}{2C} = -y'|_{c^+}$ 。两条悬链线共六个未知常数, 可通过两个固定端点、长度固定、角点连续、角点两侧的导数这六个条件决定。

13. Dido' s Problem

在古希腊传说中，腓尼基城邦泰尔发生叛乱之后，公主狄多与随从逃到北非的突尼斯，向雅布王请求能用一块牛皮围起来的土地。在得到允诺之后，她把牛皮剪成细绳，沿着海边圈占一大块土地，建立了迦太基城成为女王。狄多问题是一个可动边界的条件极值问题：



1. x -轴上有两点 A 、 B （可在轴上变动），连接 AB 两点的曲线为

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

如果曲线的长度固定为 l_0 ，欲使曲线和 x -轴所包围的区域面积最大，求曲线形状。

2. 若 $|AB| = a$ 为固定值，求曲线形状。
3. 若面元的价值为 $\rho(x, y) dx dy > 0$ ，欲使所围的面积价值最大，求曲线满足的微分方程和边界条件。
4. 如果下方的边界不是 x -轴，而是曲线 $y = \varphi(x)$ ，求围取最大价值面积的曲线所满足的微分方程和边界条件。

Solution

1.

取曲线参数化 $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, $y(t) \geq 0$ 。

面积（曲线与 x -轴之间）：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt$$

长度约束：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l_0$$

Solution

引入拉格朗日乘子 λ , 定义泛函:

$$J[x, y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

其中

$$F = y\dot{x} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

对泛函变分得欧拉-拉格朗日方程和自然边界条件:

对宗量 x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

所以:

$$-\frac{d}{dt} \left[y + \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] = 0$$
$$y + \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_1 \quad (\text{常数})$$

对宗量 y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

所以:

$$\dot{x} - \frac{d}{dt} \left[\lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] = 0$$

端点 A, B 在 x -轴上可动 (因此有自然边界条件), 即:

- $y(t_1) = 0, y(t_2) = 0$ (固定)
- $x(t_1), x(t_2)$ 自由

对 x 的自然边界条件:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1, t_2} = 0$$

在端点 $y = 0$, 得:

$$\left. \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right|_{t_1, t_2} = 0$$

若 $\lambda \neq 0$, 则:

$$\dot{x}(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_2) = 0$$

即曲线在端点处切线垂直 (平行于 y -轴)。

下面求解方程。为简便计算, 我们取弧长参数 s , 则:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \cos \theta(s), \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \sin \theta(s)$$

欧拉-拉格朗日方程化为：

$$y + \lambda \cos \theta = C_1$$

$$\cos \theta - \frac{d}{ds}(\lambda \sin \theta) = 0$$

故：

$$\cos \theta - \lambda \cos \theta \cdot \theta' = 0$$

$$1 - \lambda \theta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta' = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{常数})$$

曲率恒定，故为圆弧。又上面我们根据自然边界条件解得曲线在端点处与 x 轴垂直，故曲线为半圆。

2.

若 $|AB| = a$ 为固定值，与 (1) 问中相同，只不过端点处 x 也固定，自然边界条件消失，但曲线满足相同的微分方程。

因此曲线形状为圆弧。

3.

面积泛函获得权重 $\rho(x, y)$ ，故与 (1) 中类似：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \rho(x, y) y(t) \dot{x}(t) dt$$

长度约束：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l_0$$

引入拉格朗日乘子 λ ，定义泛函：

$$J[x, y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

其中

$$F = \rho(x, y) y \dot{x} + \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

容易解得自然边界条件与 (1) 中相同：

$$\dot{x}(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_2) = 0$$

即曲线在端点处切线垂直（平行于 y -轴）。

Solution

欧拉-拉格朗日方程则为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} &= 0\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\rho_x y \dot{x} - \frac{d}{dt} \left[\rho y + \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] &= 0 \\ (\rho + \rho_y y) \dot{x} - \frac{d}{dt} \left[\lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] &= 0\end{aligned}$$

边界条件为: $\dot{x}(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_2) = 0, \quad y(t_1) = 0, \quad y(t_2) = 0$

4.

下方的边界不是 x 轴, 而是曲线 $y = \varphi(x)$, 则面积泛函变为:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \rho(x, y)(y - \varphi(x)) \dot{x}(t) dt$$

引入拉格朗日乘子 λ 后的泛函:

$$J[x, y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

其中

$$F = \rho(x, y)(y - \varphi(x))\dot{x} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

对 x 的自然边界条件 $\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1, t_2} = 0$ 得:

$$\rho(y - \varphi(x)) \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \Big|_{t_1, t_2} = 0$$

由于端点处 $y = \varphi(x)$, 故边界条件仍为:

$$\dot{x}(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_2) = 0, \quad y(t_1) = \varphi(x(t_1)), \quad y(t_2) = \varphi(x(t_2))$$

欧拉-拉格朗日方程则为:

$$\begin{aligned}\rho_x [y - \varphi(x)] \dot{x} - \rho \varphi'(x) \dot{x} - \frac{d}{dt} \left[\rho [y - \varphi(x)] + \lambda \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] &= 0 \\ \rho_y [y - \varphi(x)] \dot{x} + \rho \dot{x} - \frac{d}{dt} \left[\lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] &= 0\end{aligned}$$

14.

对第二章直立滚轮的例子，如果取扩展拉氏函数

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \lambda_1(t)(\dot{x} - R\sin\theta\dot{\varphi}) + \lambda_2(t)(\dot{y} + R\cos\theta\dot{\varphi})$$

则得到的欧拉-拉格朗日方程会多出哪些非物理项？

Solution

考虑扩展拉格朗日函数：

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \lambda_1(t)(\dot{x} - R\sin\theta\dot{\varphi}) + \lambda_2(t)(\dot{y} + R\cos\theta\dot{\varphi})$$

欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

对广义坐标 x

$$M\ddot{x} = -\dot{\lambda}_1(t)$$

对广义坐标 y

$$M\ddot{y} = -\dot{\lambda}_2(t)$$

对广义坐标 φ

$$I_1\ddot{\varphi} - \dot{\lambda}_1(t)R\sin\theta - \lambda_1(t)R\cos\theta\dot{\theta} + \dot{\lambda}_2(t)R\cos\theta - \lambda_2(t)R\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

对广义坐标 θ

$$I_2\ddot{\theta} + \lambda_1(t)R\cos\theta\dot{\varphi} - \lambda_2(t)R\sin\theta\dot{\varphi} = 0$$

由前两个方程知 $-\dot{\lambda}_1$ 和 $-\dot{\lambda}_2$ 分别对应的是在 x 、 y 方向的约束力。

第三、四个方程 $I_1\ddot{\varphi}$ 这样的形式，应为角动量变化率与力矩对应的方程，第三个方程中的 $\dot{\lambda}_1(t)R\sin\theta$ 和 $\dot{\lambda}_2(t)R\cos\theta$ 对应的为约束力力矩，是物理的。而 $\lambda_1(t)R\cos\theta\dot{\theta}$ 和 $\lambda_2(t)R\sin\theta\dot{\theta}$ 含有 $\dot{\theta}$ ，这不应该在力矩中出现，故为非物理项。

同理第四个方程中， $\lambda_1(t)R\cos\theta\dot{\varphi}$ 和 $\lambda_2(t)R\sin\theta\dot{\varphi}$ 是非物理项。