

理论力学 A

学期： 2025 秋

助教： 于洪飞，张积翔

日期： 2025 年 11 月 1 日

作业 13 参考答案

第三章变分法与最小作用量原理

6. Dean Taylor 通胀 (inflation) 的金融策略 设社会损失函数为

$$S[\pi] = \int_0^T \{\alpha \dot{\pi}^2 + \beta(\dot{\pi} + \rho\pi)^2\} e^{-\mu t} dt, \alpha, \beta, \mu > 0, 0 < \rho < 1$$

$\pi(0) = \pi_0, \pi(T) = 0$. 求损失最小的预期通胀率 $\pi(t)$.

解答

损失函数 $S[\pi]$ 是一个泛函，被积函数（拉格朗日量）为：

$$L(t, \pi, \dot{\pi}) = [\alpha \dot{\pi}^2 + \beta(\dot{\pi} + \rho\pi)^2] e^{-\mu t}$$

$$L = [(\alpha + \beta)\dot{\pi}^2 + 2\beta\rho\pi\dot{\pi} + \beta\rho^2\pi^2] e^{-\mu t}$$

损失最小的路径 $\pi(t)$ 满足欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}} \right) = 0$$

计算各项：

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} = (2\beta\rho\dot{\pi} + 2\beta\rho^2\pi) e^{-\mu t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}} = (2(\alpha + \beta)\dot{\pi} + 2\beta\rho\pi) e^{-\mu t}$$

计算 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}} \right)$ ：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}} \right) &= \frac{d}{dt} [(2(\alpha + \beta)\dot{\pi} + 2\beta\rho\pi) e^{-\mu t}] \\ &= (2(\alpha + \beta)\ddot{\pi} + 2\beta\rho\dot{\pi}) e^{-\mu t} + (2(\alpha + \beta)\dot{\pi} + 2\beta\rho\pi) (-\mu e^{-\mu t}) \end{aligned}$$

代入 E-L 方程，并消去 $2e^{-\mu t}$ 项：

$$(\beta\rho\dot{\pi} + \beta\rho^2\pi) - [(2(\alpha + \beta)\ddot{\pi} + 2\beta\rho\dot{\pi}) - \mu(2(\alpha + \beta)\dot{\pi} + 2\beta\rho\pi)] = 0$$

$$-(\alpha + \beta)\ddot{\pi} + (\beta\rho - \beta\rho + \mu(\alpha + \beta))\dot{\pi} + (\beta\rho^2 + \mu\beta\rho)\pi = 0$$

$$-(\alpha + \beta)\ddot{\pi} + \mu(\alpha + \beta)\dot{\pi} + \beta\rho(\rho + \mu)\pi = 0$$

最终 $\pi(t)$ 满足的欧拉方程为:

$$(\alpha + \beta)\ddot{\pi} - \mu(\alpha + \beta)\dot{\pi} - \beta\rho(\rho + \mu)\pi = 0$$

这是一个二阶常系数线性微分方程, 其解 (即损失最小的预期通胀率) 可以通过求解该方程并代入边界条件 $\pi(0) = \pi_0, \pi(T) = 0$ 来确定.

7. 埃文斯垄断模型 (G. C. Evans, Gerhard Tintner) 垄断企业生产一种商品, 记单位时间的产量为 $q(t)$, 单位时间的成本为

$$a_2 q^2 + a_1 q + a_0 \quad (a_0, a_1, a_2 > 0)$$

为了简化模型, 假设企业能做到无库存运行, 需求等于产量 $q(t)$. 单位时间的需求 $q(t)$ 依赖于定价 $p(t)$, 设

$$q(t) = b_0 - b_1 p(t) + c \dot{p}(t)$$

上式中 b_0 代表与价格无关的刚性需求, $b_1 p(t)$ 项表示高价格会抑制需求. 在预期商品将要降价时, 一部分消费者会暂缓购买; 预期提价则会使一些消费者决定立即购买. 这个特点建模为 $c \dot{p}(t)$ 项. 于是在固定的时间 T 内, 企业获取的总利润为

$$\Phi[p] = \int_0^T \{p(t)q(t) - (a_2 q(t)^2 + a_1 q(t) + a_0)\} dt$$

定价策略决定利润. 求最佳定价策略 $p(t)$.

解答

这是一个变分问题, 拉格朗日量 L 是被积函数. 首先将 q 代入 L 中:

$$L(p, \dot{p}) = p(b_0 - b_1 p + c \dot{p}) - [a_2 (b_0 - b_1 p + c \dot{p})^2 + a_1 (b_0 - b_1 p + c \dot{p}) + a_0]$$

最佳定价策略 $p(t)$ 满足欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial L}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = 0$$

计算各项：

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial p} &= (b_0 - 2b_1p + c\dot{p}) - [a_2 \cdot 2(b_0 - b_1p + c\dot{p})(-b_1) + a_1(-b_1)] \\ &= (b_0 - 2b_1p + c\dot{p}) + 2a_2b_1(b_0 - b_1p + c\dot{p}) + a_1b_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} &= pc - [a_2 \cdot 2(b_0 - b_1p + c\dot{p})(c) + a_1(c)] \\ &= pc - 2a_2c(b_0 - b_1p + c\dot{p}) - a_1c\end{aligned}$$

计算 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}})$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) &= \frac{d}{dt} [pc - 2a_2cb_0 + 2a_2b_1cp - 2a_2c^2\dot{p} - a_1c] \\ &= c\dot{p} + 2a_2b_1c\dot{p} - 2a_2c^2\ddot{p}\end{aligned}$$

代入 E-L 方程：

$$(b_0 - 2b_1p + c\dot{p}) + 2a_2b_1(b_0 - b_1p + c\dot{p}) + a_1b_1 - (c\dot{p} + 2a_2b_1c\dot{p} - 2a_2c^2\ddot{p}) = 0$$

$$2a_2c^2\ddot{p} + (c + 2a_2b_1c - c - 2a_2b_1c)\dot{p} + (-2b_1 - 2a_2b_1^2)p + (b_0 + 2a_2b_1b_0 + a_1b_1) = 0$$

欧拉方程为：

$$2a_2c^2\ddot{p} - 2b_1(1 + a_2b_1)p + (b_0(1 + 2a_2b_1) + a_1b_1) = 0$$

这是一个二阶常系数非齐次线性微分方程. 边界条件：由于 $\pi(0)$ 和 $\pi(T)$ 均未被指定，这是两端自由的变分问题. 因此， $p(t)$ 必须满足自然边界条件：

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right|_{t=T} = 0$$

即：

$$cp(t) - 2a_2c(b_0 - b_1p(t) + c\dot{p}(t)) - a_1c = 0 \quad \text{when } t = 0 \text{ and } t = T$$

8. 上世纪 50 年代，在物理学期刊《Physical Review》中，曾有人提出一种既能对图像 $I(x, y)$ 降噪、又不过分减弱边缘等高频细节的算法. 具体办法是求目标泛函

$$S[\psi] = \iint (\psi(x, y) - I(x, y))^2 dx dy$$

的极值，其中 $\psi(x, y)$ 是降噪后的图像，满足约束条件

$$\iint \sqrt{(\nabla \psi)^2} dx dy = c$$

这样图形中物体轮廓线（被 $\nabla\psi$ 近似描述）保持了一定的亮度，而降噪后的图形 $\psi(x, y)$ 又能尽量接近原来的含噪声图像 $I(x, y)$. 求 $\psi(x, y)$ 满足的欧拉方程.

解答

这是一个带约束的变分问题. 我们使用拉格朗日乘子法，构造一个新的泛函 S^* :

$$S^*[\psi] = S[\psi] - \lambda \left(\iint \sqrt{(\nabla\psi)^2} dx dy - c \right)$$

$$S^*[\psi] = \iint \left[(\psi - I)^2 - \lambda \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \right] dx dy$$

被积函数（拉格朗日量）为 $L(\psi, \psi_x, \psi_y) = (\psi - I)^2 - \lambda \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}$. 其对应的欧拉-拉格朗日方程为 $(\psi_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \psi_y = \frac{\partial\psi}{\partial y})$:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_y} \right) = 0$$

计算各项:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 2(\psi - I) \\ \frac{\partial L}{\partial \psi_x} &= -\lambda \cdot \frac{1}{2\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}} \cdot (2\psi_x) = -\lambda \frac{\psi_x}{|\nabla\psi|} \\ \frac{\partial L}{\partial \psi_y} &= -\lambda \cdot \frac{1}{2\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}} \cdot (2\psi_y) = -\lambda \frac{\psi_y}{|\nabla\psi|} \end{aligned}$$

代入 E-L 方程:

$$2(\psi - I) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\psi_x}{|\nabla\psi|} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\lambda \frac{\psi_y}{|\nabla\psi|} \right) = 0$$

$$2(\psi - I) + \lambda \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_x}{|\nabla\psi|} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\psi_y}{|\nabla\psi|} \right) \right] = 0$$

注意到 $\nabla\psi = (\psi_x, \psi_y)$, $\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}$ 是 $\nabla\psi$ 方向的单位向量 $\hat{n}$. 所以方括号中的项是 $\nabla \cdot (\hat{n})$, 即 $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \right)$. 最终, $\psi(x, y)$ 满足的欧拉方程为:

$$2(\psi - I) + \lambda \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \right) = 0$$

(注: $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \right)$ 是平均曲率 (mean curvature) 的两倍.)

9. 玻璃管垂直插在水里, 求管内、外水面的形状满足的方程和边界条件.

解答

这是一个求解最小能量曲面的变分问题。系统的总能量 E 由重力势能 E_g 和表面张力势能 E_s 组成。系统将采取一种形状 $y(x)$ 来最小化总能量。 $y(x)$ 是在半径 x 处的水面高度。

总能量泛函 我们考虑一个区域 (例如管外, $x \in [R, \infty)$), 其能量泛函 $\Phi[y]$ 由三部分组成:

1. **重力势能** E_g : 一个在半径 x 、宽度 dx 、高度 y 的薄水柱的势能 (相对 $y = 0$) 是 $dE_g = \frac{1}{2} \cdot \rho g y \cdot 2\pi x y dx$ 。

$$E_g = \int \frac{1}{2} \rho g y^2 (2\pi x) dx = \int \pi \rho g x y^2 dx$$

2. **气-液界面能** E_{aw} : 由表面张力 γ_{aw} 和气-液接触面积 A_{aw} 决定。

$$A_{aw} = \int 2\pi x ds = \int 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$E_{aw} = \int 2\pi \gamma_{aw} x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

3. **固-液与固-气界面能** $E_{sl,sg}$: 当水面上升高度 $y(R)$ 时, 面积为 $A_{wall} = 2\pi R y(R)$ 的固-气界面被固-液界面替换。能量变化为:

$$\Delta E_s = (\gamma_{sl} - \gamma_{sg}) A_{wall} = 2\pi R (\gamma_{sl} - \gamma_{sg}) y(R)$$

总能量泛函 $\Phi[y] = E_g + E_{aw} + \Delta E_s$ 。我们令 L 为被积函数:

$$\Phi[y] = \int L(x, y, y') dx + C(y(R))$$

$$L(x, y, y') = \pi \rho g x y^2 + 2\pi \gamma_{aw} x \sqrt{1 + y'^2}$$

欧拉-拉格朗日方程 形状 $y(x)$ 必须满足欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$$

计算各项:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\pi \rho g x y$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = 2\pi \gamma_{aw} x \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

代入 E-L 方程：

$$2\pi\rho gxy - \frac{d}{dx} \left(\pi\gamma_{aw} \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

消去 2π 并整理，得到水面形状满足的方程：

$$\rho g y = \frac{\gamma_{aw}}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)$$

该方程在管内 ($0 < x < R$) 和管外 ($x > R$) 均成立。

3. 边界条件

1. 在管外 ($x \rightarrow \infty$): 水面必须趋于平坦。

$$y(\infty) = 0 \quad \text{且} \quad y'(\infty) = 0$$

2. 在管内中心 ($x = 0$): 由于对称性，水面在中心点必须是平坦的。

$$y'(0) = 0$$

3. 在玻璃管壁 ($x = R$): 此处为可变端点问题，边界条件由 $\frac{dg}{dy_R} = \frac{\partial L}{\partial y'} \Big|_{x=R}$ 给出（管外）或 $\frac{dg}{dy_R} = -\frac{\partial L}{\partial y'} \Big|_{x=R}$ 给出（管内）。

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dy_R} &= \frac{d}{dy(R)} [2\pi R(\gamma_{sl} - \gamma_{sg})y(R)] = 2\pi R(\gamma_{sl} - \gamma_{sg}) \\ \frac{\partial L}{\partial y'} \Big|_{x=R} &= 2\pi\gamma_{aw}R \frac{y'(R)}{\sqrt{1+y'(R)^2}} \end{aligned}$$

根据杨氏方程 (Young's relation), $\gamma_{sg} - \gamma_{sl} = \gamma_{aw} \cos \theta_c$, 其中 θ_c 是液体与固体壁的接触角。