

理论力学作业 12 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

3. 求本章习题 1 牛顿最小阻力体问题中泛函 $F[y]$ 的变分。

(提示：不要 copy 某些数学论文或物理书中的泛函，由于未考虑顶端平面，这些泛函表达式并不正确；注意这是可动边界的变分。)

Solution

习题一得到的泛函为：

$$F[y] = 2\pi\rho u^2[r^2 + \int_r^R \frac{2x}{1+y'^2} dx]$$

该泛函对应的变分是边界有约束的可动边界变分，（可以直接套用老师讲义中 23、24 页关于有约束的可动边界变分的公式，这里再进行一次推导）。令 $L(x, y') = \frac{2x}{1+y'^2}$ 变分：

$$\delta F = 2\pi\rho u^2 \left[2r\delta r + \delta \int_r^R L(x, y') dx \right]$$

对积分项变分：

$$\begin{aligned} \delta \int_r^R L(x, y') dx &= \int_r^R \delta L dx - \int_r^{r+\delta r} L dx \\ &= -L(r)\delta r + \int_r^R \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx \\ &= -L(r)\delta r + \int_r^R \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' dx \end{aligned}$$

对第二项分部积分：

$$\int_r^R \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' dx = \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right]_{x=r}^{x=R} - \int_r^R \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

边界有约束的可动边界的边界条件：

- $x = R$: $y(R) = 0$ 固定 $\Rightarrow \delta y(R) = 0$
- $x = r$: $y(r) = (y + \delta y)(r + \delta r) = y(r + \delta r) + \delta y(r) = y(r) + y'(r)\delta r + \delta y(r)$,
得 $\delta y = -y'(r)\delta r$

Solution

边界项:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right]_r^R = 0 - \frac{\partial L}{\partial y'}(r) \cdot [-y'(r) \delta r] = y'(r) \frac{\partial L}{\partial y'}(r) \delta r$$

合并 δr 项:

$$2r \delta r - L(r) \delta r + y'(r) \frac{\partial L}{\partial y'}(r) \delta r = \left[2r - L(r) + y'(r) \frac{\partial L}{\partial y'}(r) \right] \delta r$$

代入 $L(x) = \frac{2x}{1+y'^2}$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{-4xy'}{(1+y'^2)^2}$, $\frac{d}{dx} \left(\frac{-4xy'}{(1+y'^2)^2} \right) = \frac{-4y'}{(1+y'^2)^2} - 4xy'' \frac{1-3y'^2}{(1+y'^2)^3}$:
最终变分表达式

$$\delta F[y] = 2\pi \rho u^2 \left[\left(2r - \frac{2r}{1+y'^2} - \frac{4r(y')^2}{(1+y'^2)^2} \right) \delta r - \int_r^R \frac{d}{dx} \left(\frac{-4xy'}{(1+y'^2)^2} \right) \delta y dx \right]$$

若使用的坐标系与恰好相反, 即交换 x, y , $y(0)=r$, 则得到的泛函为:

$$F[y] = 2\pi \rho u^2 \left[r^2 + \int_0^L \frac{2yy'^3}{1+y'^2} dx \right]$$

其变分为固定边界但边界函数值不固定的泛函的变分, 记 $L = \frac{2yy'^3}{1+y'^2}$:

$$\begin{aligned} \delta F[y] &= 2\pi \rho u^2 \left[2r \delta r + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \Big|_0^L + \int_0^L \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \delta y dx \right] \\ &= 2\pi \rho u^2 \left[2r \delta r - \frac{2yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2} \Big|_{x=0} \delta r + \int_0^L \left(\frac{2y'^3}{1+y'^2} - \frac{d}{dx} \frac{2yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2} \right) \delta y dx \right] \\ &= 2\pi \rho u^2 \left[2r \delta r - \frac{2ry'^2(0)(3+y'^2(0))}{(1+y'^2(0))^2} \delta r + \int_0^L \left(-\frac{4y'^3}{(1+y'^2)^2} - \frac{4y'(3-y'^2)}{(1+y'^2)^3} yy'' \right) \delta y dx \right] \end{aligned}$$

4. 一条固定长度的封闭曲线, 在平面上能圈出最大面积时的形状是圆形。

要利用变分法证明这个结论, 需要先写出面积 S 、周长 L 与曲线形状的关系。设平面曲线的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

曲线是封闭的, 即

$$x(0) = x(1), \quad y(0) = y(1)$$

(1) 写出泛函 $S[x, y]$ 和 $L[x, y]$ 。

(2) 计算变分 δS 和 δL 。与前面的问题一样, 可以利用分部积分简化你的计算结果。

Solution

(1)

面积泛函（用格林公式）：

$$S[x, y] = \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)) dt$$

其中 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ 。

周长泛函：

$$L[x, y] = \oint ds = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

(2) 这两个泛函均为二宗量泛函，令 $F_S = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$ ，则：

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_0^1 [\dot{y}\delta x + x\delta\dot{y} - \dot{x}\delta y - y\delta\dot{x}] dt$$

对含 $\delta\dot{x}, \delta\dot{y}$ 的项分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\delta\dot{y} dt &= [x\delta y]_0^1 - \int_0^1 \dot{x}\delta y dt \\ \int_0^1 y\delta\dot{x} dt &= [y\delta x]_0^1 - \int_0^1 \dot{y}\delta x dt \end{aligned}$$

由于 $x(0) = x(1), y(0) = y(1)$ ，边界项为零：

$$[x\delta y]_0^1 = x(1)\delta y(1) - x(0)\delta y(0) = 0, \quad [y\delta x]_0^1 = 0$$

因此

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\dot{y}\delta x - \dot{x}\delta y - \dot{x}\delta y + \dot{y}\delta x] dt \\ &= \int_0^1 (\dot{y}\delta x - \dot{x}\delta y) dt \end{aligned}$$

令 $F_L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ，记 $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ，则：

$$\delta L = \int_0^1 \left[\frac{\partial F_L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial F_L}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right] dt = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \delta \dot{x} + \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \delta \dot{y} \right) dt$$

对两项分别进行分部积分：

$$\int_0^1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \delta \dot{x} dt = \left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \delta x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \delta x dt$$

Solution

$$\int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \delta \dot{y} dt = \left[\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \delta y \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \delta y dt$$

由于 $x(0) = x(1), y(0) = y(1)$, 边界项为零:

故:

$$\begin{aligned} \delta L &= - \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \delta x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \delta y \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\delta x + \dot{x}(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})\delta y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right] dt \end{aligned}$$

5. 伽利略、欧拉和牛顿等多位科学家曾设想过一种重力隧道: 把地球表面的地点 A 和 B , 通过细长的地下通道相连。在通道中铺上铁轨。设列车在铁轨上无摩擦地运动, 则在重力作用下, 列车可以从 A 滑行到 B 。

(1) 列车所需的运行时间 τ 是隧道形状 $r(\theta)$ 的泛函, 写出表达式

$$\tau[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} F(r, r') d\theta, \quad r' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dr}{d\theta}$$

(2) 这里的广义能量积分

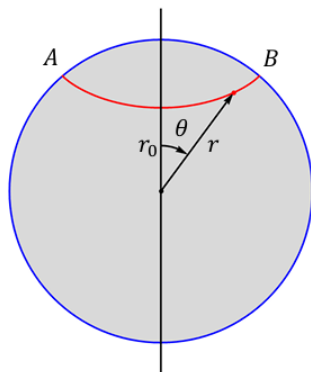
$$E = \frac{\partial F}{\partial r'} r' - F$$

是常数。该轨道最低点到地心的距离是 r_0 , 确定常数 E 。

(3) 利用广义能量积分解出 $dr/d\theta$, 然后代入 $\tau[r]$ 的表达式以消去 θ 变量, 积分求出列车所需的总运行时间 $\tau(r_0)$ 。所需积分公式可在数学手册中查找。

(4) 利用 $dr/d\theta$ 表达式, 积分求出 $\theta(r)$ 。

(5) 利用 $\theta(r)$ 求出 A 、 B 两点在地球表面的距离 s , 给出列车耗时 $\tau(s)$ 。



Solution

1.

设地球半径 R , 质量 M , 对应重力势能 (地表为零点)

$$U(r) = - \int_R^r -\frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{2R^3}(R^2 - r^2).$$

由能量守恒 (从地表静止释放)

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{R^3}(R^2 - r^2).$$

速度 $v = \frac{ds}{dt}$, 弧长 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ 。

所以运行时间

$$\tau[r] = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} d\theta.$$

2.

令

$$F(r, r') = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{R^2 - r^2}}.$$

因为 F 不显含 θ , 由 Beltrami identity

$$E = \frac{\partial F}{\partial r'} r' - F = \text{常数}.$$

计算

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

所以

$$E = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r'^2}{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{r^2 + r'^2}} - \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

在最低点 $r = r_0$, $r' = 0$, 代入得

$$E = -\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}}.$$

3.

由 E 的表达式

$$-\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{r^2 + r'^2}} = -\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}}.$$

Solution

解得

$$r'^2 = \frac{r^4(R^2 - r_0^2)}{r_0^2(R^2 - r^2)} - r^2 = \frac{R^2 r^2 (r^2 - r_0^2)}{r_0^2 (R^2 - r^2)}$$

故

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = \frac{Rr\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0\sqrt{R^2 - r^2}}$$

代入 $\tau[r]$

$$\tau(r) = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} d\theta = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r^2 \sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0 (R^2 - r^2)} d\theta.$$

$$\text{又 } d\theta = \frac{dr}{r'} = \frac{r_0 \sqrt{R^2 - r^2}}{Rr \sqrt{r^2 - r_0^2}} dr$$

$$\begin{aligned} \tau(r_0) &= \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \cdot 2 \int_{r_0}^R \frac{r^2 \sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0 (R^2 - r^2)} \cdot \frac{r_0 \sqrt{R^2 - r^2}}{Rr \sqrt{r^2 - r_0^2}} dr \\ &= 2 \sqrt{\frac{R(R^2 - r_0^2)}{GM}} \int_{r_0}^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{r^2 - r_0^2}} dr \end{aligned}$$

由于 $\int_{r_0}^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{r^2 - r_0^2}} dr = \frac{\pi}{2}$, 故

$$\tau(r_0) = \pi \sqrt{\frac{R(R^2 - r_0^2)}{GM}}$$

4.

由第三问得:

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = \frac{Rr\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0\sqrt{R^2 - r^2}}$$

解微分方程得:

$$\theta(r) = \arctan\left(\frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0} \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}\right) - \frac{r_0}{R} \arcsin\left(\sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r_0^2}}\right)$$

5.

地表两点间的大圆弧距离:

$$s = 2R\alpha$$

由第 (4) 问, 在 $r = R$ 时, $\alpha = \theta(R)$, 代入 $\theta(r)$ 公式:

Solution

$$\alpha = - \left[\arctan \left(\frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0} \sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - R^2}} \right) - \frac{r_0}{R} \arcsin \left(\sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - R^2}} \right) \right] = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{r_0}{R} \right)$$

地表距离：

$$s = 2R\alpha = \pi R \left(1 - \frac{r_0}{R} \right)$$

由第 (3) 问结果：

$$\tau(r_0) = \pi \sqrt{\frac{R(R^2 - r_0^2)}{GM}}$$

将 $r_0 = R \left(1 - \frac{s}{\pi R} \right)$ 代入：

$$\tau(s) = \sqrt{\frac{R}{GM}} \sqrt{2\pi R s - s^2}$$