

理论力学 A

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

作业 11 参考答案

日期：2025 年 11 月 1 日

第三章变分法与最小作用量原理

1. 牛顿最小阻力体 1685 年，牛顿研究了物体在不可压缩流体中的运动。物体的表面被设计成旋转曲面，同时出于装载货物之类的考虑，旋转体的长度取定为 L ，尾部半径为 R 。假设物体相对于流体以匀速运动，现需要确定阻力最小的物体形状。

假设流体粒子在与表面作弹性碰撞后被弹开，忽略粘滞力和尾流阻力之类的影响。阻力将只与物体的几何形状有关。

求物体受到的阻力 F 与旋转曲面的母线 $y = y(x)$ 之间的关系 $F = F[y]$ 。

解答

按照朱老师的意思：本题在 $x = 0$ 处的半径 $r = y(0)$ 是一个可变的端点，而不是固定的 $y(0) = 0$ 。总阻力 F 是 $x = 0$ 处平坦鼻锥的阻力 F_{nose} 和 $x \in [0, L]$ 处旋转曲面侧壁阻力 F_{side} 的总和。

$$F[y] = F_{\text{nose}} + F_{\text{side}}.$$

鼻锥阻力 F_{nose} 根据牛顿的流体阻力模型，垂直于速度 u 的平面所受的阻力 F_{nose} 正比于流体密度 ρ 、速度平方 u^2 和平面面积 A 。

$$F_{\text{nose}} = C \cdot \rho u^2 A = C\pi\rho u^2 r^2.$$

其中 C 是一个阻力系数。

侧壁阻力 F_{side} 对于一个与 x 轴夹角为 ϕ 的表面 ($y' = \tan \phi$)，压力 $p \propto \rho u^2 \sin^2 \phi$ 。此压力在 x 方向的分量 $p_x = p \sin \phi$ 。环带面积 $dA = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$ 。

$$dF_x = p_x dA = (C' \rho u^2 \cos^3 \phi)(2\pi y \sec \phi dx).$$

带入 $y' = \tan \phi$ ，积分得到侧壁总阻力：

$$F_{\text{side}}[y] = 2C'\pi\rho u^2 \int_0^L \frac{yy'^3}{1 + y'^2} dx.$$

总阻力 将两部分相加, 令 $r = y(0)$, $2C' \rightarrow C'$:

$$F[y, r] = C' \pi \rho u^2 \int_0^L \frac{y y'^3}{1 + y'^2} dx + C \pi \rho u^2 r^2$$

$$F[y] = \pi \rho u^2 \left[C' \int_0^L \frac{y y'^3}{1 + y'^2} dx + C r^2 \right]$$

这个泛函是 $y(x)$ 和其端点值 $y(0)$ 的函数.

2. 求泛函

$$\Phi[f] = \left\{ \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \right\} \left\{ \int_0^1 (f(x) + 1)^2 dx \right\}$$

的变分 $\delta\Phi$.

解答

我们对泛函 $\Phi[f]$ 求变分, 它是一个乘积形式 $\Phi = A \cdot B$.

$$\delta\Phi = (\delta A)B + A(\delta B)$$

1. 计算 δA :

$$A = \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

令 $u = \sqrt{x}$, 则 $x = u^2$, $dx = 2u du$.

$$A = \int_0^1 f(u)(2u) du$$

$$\delta A = \int_0^1 \delta f(u)(2u) du$$

换回 x 变量 ($u \rightarrow x$):

$$\delta A = \int_0^1 \delta f(x)(2x) dx$$

2. 计算 δB :

$$B = \int_0^1 (f(x) + 1)^2 dx$$

$$\delta B = \int_0^1 2(f(x) + 1) \delta f(x) dx$$

组合 $\delta\Phi$:

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \left\{ \int_0^1 \delta f(x)(2x) dx \right\} \left\{ \int_0^1 [f(x) + 1]^2 dx \right\} \\ & + \left\{ \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \right\} \left\{ \int_0^1 2[f(x) + 1] \delta f(x) dx \right\} \end{aligned}$$