

理论力学作业 10 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

20. 利用位力定理估算太阳的温度作如下假设：

1. 只考虑万有引力，给出太阳动能均值 $\langle K \rangle$ 与势能均值 $\langle V \rangle$ 的关系。
2. 设太阳是半径为 R_0 、质量为 M_0 的均匀球体，写出球体内部的势能函数 $V(r)$ 。
3. 利用 $V(r)$ 计算 $\langle V \rangle$ 。
4. 太阳处于等离子体状态，主要是质量由氢离子（质子）贡献，数目约为 $N = M_0/m_p$ 。

由能量均分定理， $\langle K \rangle = \frac{3}{2}Nk_B T$ 。根据前面的结果估算太阳的温度。

已知常数：

$$M_0 \approx 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad R_0 \approx 6.963 \times 10^5 \text{ km},$$

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1},$$

$$m_p = 1.6726216 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Solution

1.

对于引力势，势能是坐标的 (-1) 次函数：

$$V(\lambda \vec{x}_1, \lambda \vec{x}_2, \dots, \lambda \vec{x}_n) = \lambda^{-1} V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$$

故由位力定理得：

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$$

2.

太阳外部的势能相当于质量为 $M_\odot$ 的质点作用产生的，对于质量为 m 的检测粒子， $V(R_\odot) = -\frac{GM_\odot m}{R_\odot}$ ，记太阳的体密度为 ρ ，则太阳内部的势能为：

$$\begin{aligned} V(r) &= V(R_\odot) - \int_{R_\odot}^r \frac{Gm\rho \frac{4\pi r^3}{3}}{r^2} dr \\ &= \frac{GM_\odot m}{R_\odot} \left(\frac{r^2}{2R_\odot^2} - \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Solution

3.

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{V(r)}{m} dm$$

式中 $\frac{1}{2}$ 为防止重复计算势能的系数

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{V(r)}{m} \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

代入 $V(r)$ 和 ρ :

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^R \left[-\frac{GM}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{3GM^2}{2R^4} \int_0^R \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right) r^2 dr \\ &= -\frac{3GM^2}{2R^4} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{r^3}{3} - \frac{1}{2R^2} \cdot \frac{r^5}{5} \right]_0^R \\ &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \end{aligned}$$

4.

合并以上三问结果:

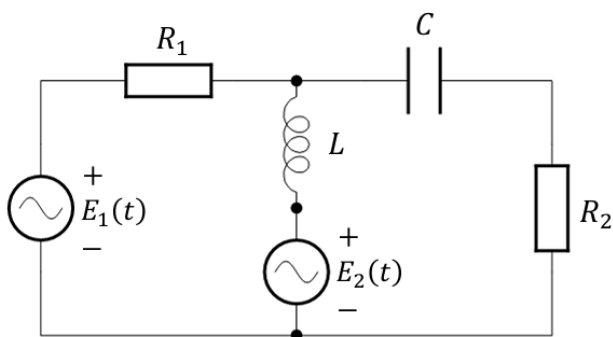
$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$$

$$\frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R}$$

代入数据解得

$$T = \frac{GMm_p}{5Rk_B} \approx 4.62 \times 10^6 K$$

21. 用拉格朗日力学的方法, 写出下图电路的电路方程。



Solution

记电流 i_1 为从上至下通过 L 的电流，电流 i_2 为从上至下通过 R_2 的电流， e_1 、 e_2 与 i_1 、 i_2 对应。故该电路系统对应的拉氏函数为：

$$L = \frac{1}{2}Li_1^2 - \left(\frac{e_2^2}{2C} - E_1(e_1 + e_2) + E_2e_1\right)$$

瑞利耗散函数为

$$G = \frac{1}{2}R_2i_2^2 + \frac{1}{2}R_1(i_1 + i_2)^2$$

电路方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial i_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial e_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial i_\alpha} = 0$$

即

$$\begin{aligned} L\ddot{e}_1 + R_1(\dot{e}_1 + \dot{e}_2) - E_1 + E_2 &= 0 \\ R_1\dot{e}_1 + (R_1 + R_2)\dot{e}_2 + \frac{1}{C}e_2 - E_1 &= 0 \end{aligned}$$