

# 理论力学 A

## 作业 09 参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 10 月 28 日

## 第二章拉格朗日力学

18. 考虑讲稿中冰橇运动的例题，该系统有没有循环坐标？广义能量是否守恒？

### 解答

回顾讲稿第 29 页中冰橇运动的拉格朗日量：

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgy \sin \alpha.$$

一个首先的观察是，拉格朗日量  $L$  中并不显含坐标  $x, \theta$ ，因此， $x, \theta$  是该系统的一个循环坐标。但实际上由于约束的存在， $x$  是与  $y$  相关联的，并不能单独作为一个自由度来看待。因此，严格来说，该系统只有一个循环坐标  $\theta$ 。这里强调一句话，希望同学们记住：

**写拉格朗日量时，必须先把约束条件代入，消去所有的约束自由度，才能判断哪些坐标是循环坐标！**

与之对应的一个与本题无关的结论是：

**写拉格朗日量时，禁止将守恒量带入！**

最后，由于拉格朗日量  $L$  不显含时间  $t$ ，根据广义能量守恒定理，系统的广义能量守恒。

19. Goodwin's growth cycle model, 1967 Goodwin 增长周期模型是关于总产值与就业率的简单动力学模型，运动方程是

$$\begin{cases} \dot{u} = [-(\alpha + \gamma) + \rho v]u \\ \dot{v} = \left[ \frac{1}{\sigma}(1 - u) - (\alpha + \beta) \right] v \end{cases}$$

这里  $u(t)$  是劳动力收入占比， $v(t)$  是就业率； $\alpha$  是技术进步导致的生产力增长率， $\beta$  是劳动人口增长率， $\sigma$  是资本产出比， $\gamma$  和  $\rho$  是两个正的常数。

(1) 验证此模型存在拉格朗日函数 (Fernandez-Nuñez, 1998)

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{v}}{v} \ln u - \frac{\dot{u}}{u} \ln v \right) + \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) \ln u - (\alpha + \gamma) \ln v + \frac{1}{\sigma} u + \rho v$$

(2) 写出广义能量积分  $H(u, v, \dot{u}, \dot{v})$

(3) 找出平衡点:  $(u(t), v(t))$  取什么样的初值  $(u_0, v_0)$ , 才会不随时间变化?

(4) 把两个运动方程相除, 可得  $du/dv$  不显式依赖于时间。积分求出  $u, v$  之间的函数关系。

### 解答

(1) 验证拉格朗日函数

我们验证拉格朗日方程  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ 。

对广义坐标  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{u} \ln v \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( -\frac{\ln v}{2u} \right) = -\frac{1}{2} \frac{(\frac{\dot{v}}{v})u - \dot{u} \ln v}{u^2} = -\frac{\dot{v}}{2uv} + \frac{\dot{u} \ln v}{2u^2} \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{v}}{v} \frac{1}{u} - \left( -\frac{\dot{u}}{u^2} \right) \ln v \right) + \frac{1}{u} \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma} \\ &= \frac{\dot{v}}{2uv} + \frac{\dot{u} \ln v}{2u^2} + \frac{1}{u} \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

代入方程:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\dot{v}}{2uv} + \frac{\dot{u} \ln v}{2u^2} \right) - \left( \frac{\dot{v}}{2uv} + \frac{\dot{u} \ln v}{2u^2} + \frac{1}{u} \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma} \right) &= 0 \\ -\frac{\dot{v}}{uv} - \frac{1}{u} \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{1}{\sigma} &= 0 \\ -\frac{\dot{v}}{v} - \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{u}{\sigma} &= 0 \\ \frac{\dot{v}}{v} &= -(\alpha + \beta) + \frac{1}{\sigma}(1 - u) \end{aligned}$$

这正好是  $v$  的运动方程。

对广义坐标  $v$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v} \ln u \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\ln u}{2v} \right) = \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{\dot{u}}{u} \right) v - \dot{v} \ln u}{v^2} = \frac{\dot{u}}{2uv} - \frac{\dot{v} \ln u}{2v^2} \\ \frac{\partial L}{\partial v} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\dot{v}}{v^2} \ln u - \frac{\dot{u}}{u} \frac{1}{v} \right) - \frac{1}{v} (\alpha + \gamma) + \rho \\ &= -\frac{\dot{v} \ln u}{2v^2} - \frac{\dot{u}}{2uv} - \frac{1}{v} (\alpha + \gamma) + \rho\end{aligned}$$

代入方程:

$$\begin{aligned}\left( \frac{\dot{u}}{2uv} - \frac{\dot{v} \ln u}{2v^2} \right) - \left( -\frac{\dot{v} \ln u}{2v^2} - \frac{\dot{u}}{2uv} - \frac{1}{v} (\alpha + \gamma) + \rho \right) &= 0 \\ \frac{\dot{u}}{uv} + \frac{1}{v} (\alpha + \gamma) - \rho &= 0 \\ \frac{\dot{u}}{u} + (\alpha + \gamma) - \rho v &= 0 \\ \frac{\dot{u}}{u} &= -(\alpha + \gamma) + \rho v\end{aligned}$$

这正好是  $u$  的运动方程。验证完毕。

(2) **广义能量积分**  $H$   $L$  不显含时间  $t$ , 广义能量  $H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$  守恒。

$$\begin{aligned}H &= \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \dot{v} \right) - L \\ &= \left( -\frac{\ln v}{2u} \dot{u} + \frac{\ln u}{2v} \dot{v} \right) \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{v}}{v} \ln u - \frac{\dot{u}}{u} \ln v \right) + \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) \ln u - (\alpha + \gamma) \ln v + \frac{1}{\sigma} u + \rho v \right] \\ &= \left( -\frac{\dot{u}}{2u} \ln v + \frac{\dot{v}}{2v} \ln u \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{v}}{v} \ln u - \frac{\dot{u}}{u} \ln v \right) - [\dots]_{\text{non-velocity terms}} \\ &= 0 - \left[ \left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) \ln u - (\alpha + \gamma) \ln v + \frac{1}{\sigma} u + \rho v \right] \\ H &= -\left( \alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) \ln u + (\alpha + \gamma) \ln v - \frac{1}{\sigma} u - \rho v\end{aligned}$$

(3) **平衡点**平衡点意味着  $\dot{u} = 0$  且  $\dot{v} = 0$ 。

- $\dot{u} = [-(\alpha + \gamma) + \rho v]u = 0$ 。由于  $u \neq 0$ , 则:

$$-(\alpha + \gamma) + \rho v = 0 \implies v_0 = \frac{\alpha + \gamma}{\rho}$$

- $\dot{v} = [\frac{1}{\sigma}(1-u) - (\alpha + \beta)]v = 0$ 。由于  $v \neq 0$ ，则：

$$\frac{1}{\sigma}(1-u) - (\alpha + \beta) = 0 \implies 1-u = \sigma(\alpha + \beta) \implies u_0 = 1 - \sigma(\alpha + \beta)$$

(4)  $u, v$  关系将两个运动方程相除：

$$\frac{du}{dv} = \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{[-(\alpha + \gamma) + \rho v]u}{[\frac{1}{\sigma}(1-u) - (\alpha + \beta)]v}$$

分离变量：

$$\begin{aligned} \frac{[\frac{1}{\sigma}(1-u) - (\alpha + \beta)]}{u} du &= \frac{[-(\alpha + \gamma) + \rho v]}{v} dv \\ \int \left[ \frac{1-u}{\sigma u} - \frac{\alpha + \beta}{u} \right] du &= \int \left[ -\frac{\alpha + \gamma}{v} + \rho \right] dv \\ \int \left[ \left( \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta \right) \frac{1}{u} - \frac{1}{\sigma} \right] du &= \int \left[ -(\alpha + \gamma) \frac{1}{v} + \rho \right] dv \end{aligned}$$

积分得到：

$$\left( \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta \right) \ln u - \frac{1}{\sigma} u = -(\alpha + \gamma) \ln v + \rho v + C$$