

理论力学 A

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

作业 07 参考答案

日期：2025 年 10 月 21 日

第二章拉格朗日力学

10. 在重力的作用下，质点在旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上运动，其中 z -轴方向是垂直向上。写出拉氏函数和拉氏方程。

解答

使用柱坐标系 (r, θ, z) 。质点坐标为 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ 。

- 动能 T :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

- 势能 V :

$$V = mgz$$

- 约束条件: 约束方程为 $z = x^2 + y^2 = r^2$ 。这是一个完整约束。我们选取 r 和 θ 作为广义坐标。对约束求导: $\dot{z} = 2r\dot{r}$ 。

- 拉氏函数 L 将 $\dot{z}$ 和 z 代入 $L = T - V$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + (2r\dot{r})^2) - mgr^2 \\ &= \frac{1}{2}m((1 + 4r^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr^2 \end{aligned}$$

拉氏方程:

1. 对 θ : θ 是循环坐标，因为 $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ 。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$$mr^2\dot{\theta} = \text{const} \quad (\text{角动量守恒})$$

2. 对 r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}m(8r\dot{r}^2 + 2r\dot{\theta}^2) - 2mgr = 4mr\dot{r}^2 + mr\dot{\theta}^2 - 2mgr$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m(1 + 4r^2)\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m(8r\dot{r})\dot{r} + m(1 + 4r^2)\ddot{r} = 8mr\dot{r}^2 + m(1 + 4r^2)\ddot{r}$$

应用 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$:

$$[8mr\dot{r}^2 + m(1 + 4r^2)\ddot{r}] - [4mr\dot{r}^2 + mr\dot{\theta}^2 - 2mgr] = 0$$

$$m(1 + 4r^2)\ddot{r} + 4mr\dot{r}^2 - mr\dot{\theta}^2 + 2mgr = 0$$

$$(1 + 4r^2)\ddot{r} + 4r\dot{r}^2 - r\dot{\theta}^2 + 2gr = 0$$

11. 质量 m 的小球，在光滑的水平桌面上作二维运动. 桌面中心有一光滑小孔 O . 将一个质量为 M 的铁块放在小孔的下方，并用绳子将小球与之拴在一起，绳长为 l .

设铁块在一垂直平面内运动，且绳子始终处于绷直状态. 写出系统的拉氏函数和运动方程.

解答

这是一个具有 3 个自由度的系统. 我们选择广义坐标:

- r : 小球 m 离小孔的水平距离.
- θ_1 : 小球 m 在水平桌面上的极角.
- θ_2 : 铁块 M 偏离竖直线的摆角.

绳长为 l . 小球 m 占用的绳长为 r ，则铁块 M 的摆长为 $(l - r)$.

- 动能 T : $T = T_m + T_M$

$$T_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_1^2)$$

对于 M ，其速度由 r 的变化（径向）和 θ_2 的变化（切向）合成:

$$v_M^2 = \dot{r}^2 + (l - r)^2\dot{\theta}_2^2$$

$$T_M = \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + (l - r)^2\dot{\theta}_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2}(m + M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}M(l - r)^2\dot{\theta}_2^2$$

- 势能 V : $V = V_m + V_M$. 设桌面为 $V_m = 0$. 设小孔为 V_M 的零点, 竖直向下为正.

$$V = -Mg(l - r) \cos \theta_2$$

- 拉氏函数 $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{2}(m + M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}M(l - r)^2\dot{\theta}_2^2 + Mg(l - r) \cos \theta_2$$

拉氏方程:

1. 对 θ_1 : θ_1 是循环坐标.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}_1) = 0$$

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta}_1 + r^2\ddot{\theta}_1) = 0 \implies 2\dot{r}\dot{\theta}_1 + r\ddot{\theta}_1 = 0$$

2. 对 r :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}_1^2 + M(l - r)(-1)\dot{\theta}_2^2 - Mg \cos \theta_2$$

$$= mr\dot{\theta}_1^2 - M(l - r)\dot{\theta}_2^2 - Mg \cos \theta_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} ((m + M)\dot{r}) = (m + M)\ddot{r}$$

$$(m + M)\ddot{r} - mr\dot{\theta}_1^2 + M(l - r)\dot{\theta}_2^2 + Mg \cos \theta_2 = 0$$

3. 对 θ_2 :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -Mg(l - r) \sin \theta_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{d}{dt} (M(l - r)^2\dot{\theta}_2)$$

$$= M \left[2(l - r)(-\dot{r})\dot{\theta}_2 + (l - r)^2\ddot{\theta}_2 \right]$$

$$M(l - r) \left[-2\dot{r}\dot{\theta}_2 + (l - r)\ddot{\theta}_2 \right] + Mg(l - r) \sin \theta_2 = 0$$

$$(l - r)\ddot{\theta}_2 - 2\dot{r}\dot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 = 0$$

12. (惠更斯等时摆) 如图, 已知摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

按此外形做成挡板. 一根长 $4a$ 的无弹性轻绳, 一端系在坐标原点 O , 另一端拴着质量为 m 的小球. 在 A 点, 绳子与曲面相切.

- (1) 计算参数区间 $[0, \theta]$ 的摆线长度.
- (2) 记切点 A 的曲线参数为 $\theta(t)$, 求小球的坐标 $x(\theta), y(\theta)$.
- (3) 以 $\theta(t)$ 为广义坐标, 写出拉氏函数.
- (4) 我们希望把拉氏函数中与广义速度有关的项化简, 为此令动能为

$$T \triangleq \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

其中 m 是常数. 求变换后的广义坐标 $q = q(\theta)$.

- (5) 求 $V = V(q)$ 的表达式.
- (6) 求摆的周期. 周期与振幅是否有关?

解答

- (1) **摆线长度** 摆线 (旋轮线) 方程为 $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$. 弧长元

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a \sqrt{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta \\ &= a \sqrt{2(2 \sin^2(\theta/2))} d\theta \\ &= 2a \sin(\theta/2) d\theta. \end{aligned}$$

从 0 到 θ 的弧长 $s(\theta)$ 为:

$$s(\theta) = \int_0^\theta 2a \sin(u/2) du = [-4a \cos(u/2)]_0^\theta = 4a(1 - \cos(\theta/2))$$

- (2) **小球坐标** 设 y 轴竖直向下 (与图示一致). 切点 A 的坐标为 $x_A = a(\theta - \sin \theta), y_A = a(1 - \cos \theta)$. 切线斜率 $m = \frac{dy_A}{dx_A} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} = \cot(\theta/2)$. 切线与 x 轴的夹角 α 满足 $\tan \alpha = \cot(\theta/2)$, y 轴向下时 $\alpha =$

$\pi/2 - \theta/2$. 自由绳长 $L' = (\text{总长}) - s(\theta) = 4a - 4a(1 - \cos(\theta/2)) = 4a \cos(\theta/2)$.
 小球 P 的坐标 (x_P, y_P) 为:

$$\begin{aligned}
 x_P &= x_A + L' \cos \alpha \\
 &= a(\theta - \sin \theta) + 4a \cos(\theta/2) \cos(\pi/2 - \theta/2) \\
 &= a(\theta - \sin \theta) + 4a \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\
 &= a(\theta - \sin \theta) + 2a \sin \theta \\
 &= a(\theta + \sin \theta), \\
 y_P &= y_A + L' \sin \alpha \\
 &= a(1 - \cos \theta) + 4a \cos(\theta/2) \sin(\pi/2 - \theta/2) \\
 &= a(1 - \cos \theta) + 4a \cos(\theta/2) \cos(\theta/2) \\
 &= a(1 - \cos \theta) + 2a(1 + \cos \theta) \\
 &= a(3 + \cos \theta).
 \end{aligned}$$

(3) 拉氏函数

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_P &= a(1 + \cos \theta)\dot{\theta}, \quad \dot{y}_P = -a \sin \theta \dot{\theta} \\
 v_P^2 &= \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = a^2 \dot{\theta}^2 ((1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta) = a^2 \dot{\theta}^2 (2 + 2 \cos \theta) = 4a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta/2) \\
 T &= \frac{1}{2} m v_P^2 = 2ma^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta/2) \\
 \text{势能 } V &= -mgy_P = -mga(3 + \cos \theta) \quad (\text{取 } y = 0 \text{ 为势能零点}).
 \end{aligned}$$

$$L = T - V = 2ma^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta/2) + mga(3 + \cos \theta)$$

(4) 新广义坐标 q 我们要求 $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$.

$$\frac{1}{2} m \dot{q}^2 = 2ma^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta/2) \implies \dot{q}^2 = 4a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta/2)$$

$$\dot{q} = 2a \dot{\theta} \cos(\theta/2)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{dq}{d\theta} = 2a \cos(\theta/2)$$

$$q(\theta) = \int 2a \cos(\theta/2) d\theta = 4a \sin(\theta/2).$$

(5) 势能 $V(q)$

$$V = -mga(3 + \cos \theta)$$

利用 $q = 4a \sin(\theta/2) \implies \sin(\theta/2) = q/(4a)$.

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2) = 1 - 2 \left(\frac{q}{4a} \right)^2 = 1 - \frac{q^2}{8a^2}$$

$$V(q) = -mga \left(3 + 1 - \frac{q^2}{8a^2} \right) = -mga \left(4 - \frac{q^2}{8a^2} \right)$$

(6) 摆的周期以 q 为广义坐标, 新的拉氏函数为:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mga\left(4 - \frac{q^2}{8a^2}\right)$$

对应的拉氏方程为:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$m\ddot{q} - mga\left(-\frac{2q}{8a^2}\right) = 0$$

$$m\ddot{q} + \frac{mg}{4a}q = 0 \implies \ddot{q} + \left(\frac{g}{4a}\right)q = 0$$

这是一个简谐振动方程 $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, 其角频率 $\omega = \sqrt{g/(4a)}$. 周期 $T_p = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{4a/g} = 4\pi\sqrt{a/g}$. 周期 T_p 是一个常数, 仅与 a 和 g 有关, 与振幅 (即 q 的最大值) 无关.

13. 折线绕对称轴以固定的角速度 ω 旋转, 在 $t = 0$ 时折线的形状为 $z = |x|$. 折线的两段分别套着两个光滑小环 (质量可忽略), 小环用长 a 、质量为 m 均匀光滑细杆连接.

(1) 写出系统的拉氏函数和运动方程.

(2) 细杆在折线上是否存在稳定位置?

解答

(1) **拉氏函数和运动方程** 设 z 轴为对称轴, $t = 0$ 时折线在 xz 平面, 方程为 $z = |x|$. 系统绕 z 轴旋转, 角速度为 ω . 设细杆两端 A, B 的坐标. 我们用杆 AB 与 z 轴的夹角 θ 作为广义坐标. A 在 $z = -x'$, B 在 $z = x'$ (在旋转的 $x'z'$ 平面内). 设杆 AB 的中点为 $C(x'_C, z'_C)$.

$$A = (x'_C - \frac{a}{2}\sin\theta, z'_C + \frac{a}{2}\cos\theta)$$

$$B = (x'_C + \frac{a}{2}\sin\theta, z'_C - \frac{a}{2}\cos\theta)$$

代入约束 $z_A = -x'_A$ 和 $z_B = x'_B$:

$$z'_C + \frac{a}{2}\cos\theta = -x'_C + \frac{a}{2}\sin\theta \implies z'_C + x'_C = \frac{a}{2}(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$z'_C - \frac{a}{2}\cos\theta = x'_C + \frac{a}{2}\sin\theta \implies z'_C - x'_C = \frac{a}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$$

解得质心 C 的坐标 (在旋转系中):

$$z'_C = \frac{a}{2}\sin\theta, \quad x'_C = -\frac{a}{2}\cos\theta$$

动能 $T = T_{trans} + T_{rot}$

C 在实验室系的速度 v_C^2 : C 的柱坐标为 $(r_C, \phi_C, z_C) = (|x'_C|, \omega t, z'_C)$,

$$\begin{aligned} v_C^2 &= \dot{r}_C^2 + r_C^2 \dot{\phi}_C^2 + \dot{z}_C^2 \\ &= \left(\frac{d|x'_C|}{dt}\right)^2 + |x'_C|^2 \omega^2 + \dot{z}'_C{}^2 \\ &= \left(\frac{a}{2} \sin \theta \dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos \theta\right)^2 \omega^2 + \left(\frac{a}{2} \cos \theta \dot{\theta}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \omega^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) \\ &= \frac{a^2}{4} (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta), \end{aligned}$$

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{8} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta).$$

杆绕质心的转动动能 T_{rot} : 杆在旋转系中以 $\dot{\theta}$ 转动 (绕 y' 轴), 且随框架绕 z 轴以 ω 转动. 在杆的质心坐标系 (1 轴沿杆, 3 轴为 y' 轴), 转动惯量 $I_1 = 0, I_2 = I_3 = \frac{1}{12} m a^2$. $\boldsymbol{\omega}_{rod} = (\omega \cos \theta, \omega \sin \theta, \dot{\theta})$.

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[0 + \frac{1}{12} m a^2 (\omega \sin \theta)^2 + \frac{1}{12} m a^2 \dot{\theta}^2 \right] \\ &= \frac{1}{24} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

最终系统动能:

$$\begin{aligned} T &= T_{trans} + T_{rot} \\ &= \frac{1}{8} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{24} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) m a^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{8} \cos^2 \theta + \frac{1}{24} \sin^2 \theta\right) m a^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{6} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} m a^2 \omega^2 (3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{6} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} m a^2 \omega^2 (2 \cos^2 \theta + 1). \end{aligned}$$

势能 V : $V = m g z'_C = m g \frac{a}{2} \sin \theta$

拉氏函数 $L = T - V$:

$$L = \frac{1}{6} m a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} m a^2 \omega^2 (2 \cos^2 \theta + 1) - \frac{1}{2} m g a \sin \theta$$

拉氏方程: $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta} \implies \frac{d}{dt}(\dots) = \frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{24}ma^2\omega^2(4\cos\theta(-\sin\theta)) - \frac{1}{2}mga\cos\theta = -\frac{1}{6}ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}mga\cos\theta$$

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} - \left[-\frac{1}{6}ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}mga\cos\theta \right] = 0$$

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{6}ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}mga\cos\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{3g}{2a}\cos\theta = 0$$

(2) **稳定位置** 稳定位置是有效势能 V_{eff} 的极小值点. $L = \frac{1}{2}A(\theta)\dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}(\theta)$.

$$V_{\text{eff}}(\theta) = -\frac{1}{24}ma^2\omega^2(2\cos^2\theta + 1) + \frac{1}{2}mga\sin\theta$$

平衡位置是 $F_{\text{eff}} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta} = 0$ 的点.

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta} = -\frac{1}{24}ma^2\omega^2(4\cos\theta(-\sin\theta)) + \frac{1}{2}mga\cos\theta = 0$$

$$\frac{1}{6}ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}mga\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta \left(\frac{1}{6}ma^2\omega^2\sin\theta + \frac{1}{2}mga \right) = 0$$

平衡点有两种可能: 1) $\cos\theta = 0 \implies \theta = \pi/2$ (杆水平) 2) $\sin\theta = -\frac{mga/2}{ma^2\omega^2/6} = -\frac{3g}{a\omega^2}$, 显然 $\sin\theta < 0$ 没有物理意义, 舍去.

稳定性由 $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2}$ 的符号决定 ($\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2} > 0$ 为稳定), $\theta = \pi/2$ 时

$$\left. \frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\theta^2} \right|_{\pi/2} = \frac{1}{6}ma^2\omega^2(0 - 1) - \frac{1}{2}mga(1) = -\frac{1}{6}ma^2\omega^2 - \frac{1}{2}mga < 0$$

因此没有稳定位置.