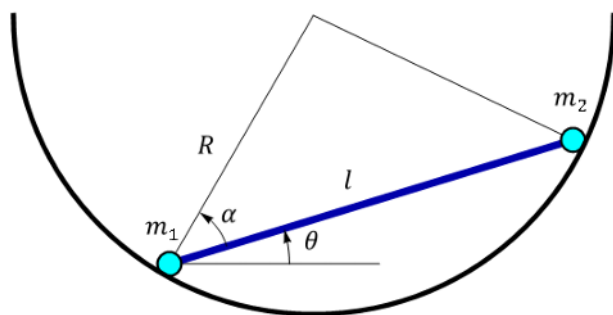


理论力学作业 06 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

8. 光滑的半球形碗（半径为 R ）中，有两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小球，小球用长度为 l 的刚性细杆连在一起，杆子的质量可忽略不计。利用虚功原理，求平衡时杆子与水平面的夹角。



Solution

显然只需要考虑如图所示的二维情况即可，同时参数均在图中标出，以 θ 为广义坐标，以向下为 y 轴正方向，原点为球心。

对小球 1:

$$y_1 = R \sin(\alpha + \theta)$$

对小球 2:

$$y_2 = R \sin(\alpha - \theta)$$

只有重力势能为主动力势能，故：

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g R \sin(\alpha + \theta) - m_2 g R \sin(\alpha - \theta)$$

由虚功原理，平衡时有：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ &= -m_1 g R \cos(\alpha + \theta) + m_2 g R \cos(\alpha - \theta) \\ &= g R [\sin \theta (m_1 \sin \alpha + m_2 \sin \alpha) + \cos \theta (m_2 \cos \alpha - m_1 \cos \alpha)] \end{aligned}$$

Solution

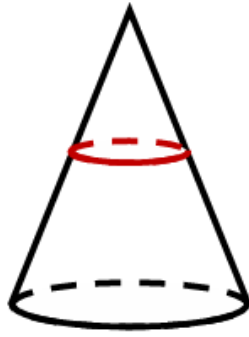
解得：

$$\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cot \alpha\right)$$

$$\text{又 } \cos \alpha = \frac{l}{2R},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{\sqrt{4R^2 - l^2}}\right)$$

9. 光滑锥体上套着一根很细的环形橡皮绳。锥体底面朝下垂直放置，半顶角为 α 。橡皮绳的自然长度为 l ，质量为 m ，弹性系数为 k 。求橡皮绳的平衡位置。



Solution

设 z 轴正方向竖直向下，原点为圆锥顶部。设平衡时坐标为 z ，则此时橡皮绳长度为：

$$L = 2\pi z \tan \alpha$$

重力和弹力均为主动力，故主动力势能为：

$$\begin{aligned} V &= V_G + V_P \\ &= -mgz + \frac{1}{2}k(L - l)^2 \\ &= -mgz + \frac{k}{2}(2\pi z \tan \alpha - l)^2 \end{aligned}$$

平衡时：

$$0 = \frac{\partial V}{\partial z} = -mg + 2\pi k \tan \alpha (2\pi z \tan \alpha - l)$$

解得平衡时橡皮绳位置为：

$$z = \frac{mg}{k(2\pi \tan \alpha)^2} + \frac{l}{2\pi \tan \alpha}$$