

理论力学 A

作业 05 参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 10 月 12 日

第二章拉格朗日力学

5. 长度为 l 、质量为 m 的无弹性绳子，在三维空间的形状可以用弧长参数 s 表示为

$$\mathbf{x}(s, t), \quad s \in [0, l],$$

绳子的 $s=0$ 这一端被握在手中，被强迫沿固定轨迹 $\mathbf{a}(t)$ 移动，即

$$\mathbf{x}(s=0, t) = \mathbf{a}(t),$$

其中 $\mathbf{a}(t)$ 是已知函数.

- (1) 绳子所受的主动力和约束力有哪些?
- (2) 判断绳子所受的约束（包含绳子内部的作用、手对绳子的作用），是否为定常约束、完整约束、理想约束?

解答

- (1)
 - **主动力**: 作用在绳子每一段上的重力.
 - **约束力**:
 - 手为了使绳子一端 ($s=0$) 沿指定轨迹 $\mathbf{a}(t)$ 运动而施加的力.
 - 绳子内部的张力，该力维持绳子总长度不变（无弹性约束）.
- (2)
 - **手对绳子的作用**:
 - **非定常约束**: 约束方程为 $\mathbf{x}(0, t) - \mathbf{a}(t) = 0$. 由于 $\mathbf{a}(t)$ 显含时间 t , 所以该约束为非定常（时变）约束.
 - **完整约束**: 约束方程是关于坐标和时间的代数方程，可以写成 $f(\mathbf{r}, t) = 0$ 的形式，所以是完整（几何）约束.
 - **理想约束**: 约束力只作用在 $s=0$ 点上，而该点的虚位移 $\delta \mathbf{x}(0, t)$ 必须为零（因为其运动轨迹已被完全确定），所以约束力所做的虚功为零. 因此，这是理想约束.
 - **绳子内部的作用力**:

- **定常约束**: 该约束是绳子不可伸长, 可以用微分形式表示为 $|\partial \mathbf{x} / \partial s| = 1$. 这个方程不显含时间 t , 所以是定常 (稳定) 约束.
- **完整约束**: 对于绳子这种连续体, 不可伸长的约束是联系各质元坐标的微分约束, 但它可以被看作是无限多个完整约束的集合 (即任意两质元间距离恒定), 在分析力学中通常将其视为完整约束处理.
- **理想约束**: 绳子内部的张力总是成对出现, 大小相等, 方向相反 (牛顿第三定律). 在任何保持绳子长度不变的虚位移中, 这些内力所做的总虚功为零. 因此, 这是理想约束.

6. 如图, 两个小球用轻绳悬挂在固定点构成一个双摆. 小球质量为 m_1, m_2 ; 绳长为 l_1, l_2 . 以角度 θ_1, θ_2 为广义坐标, 利用达朗贝尔原理写出运动方程.

解答

设悬挂点为坐标原点, 竖直向下为 y 轴正方向, 水平向右为 x 轴正方向.

- 质点 m_1 的位置矢量 $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}_1 = (l_1 \sin \theta_1) \hat{i} + (l_1 \cos \theta_1) \hat{j}$$

- 质点 m_2 的位置矢量 $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{r}_2 = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \hat{i} + (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \hat{j}$$

对时间求二次导数, 得到加速度矢量:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) \hat{i} - (l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) \hat{j} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \hat{i} \\ &\quad - (l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \hat{j} \end{aligned}$$

且有:

- 主动力:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 g \hat{j}, \quad \mathbf{F}_2 = m_2 g \hat{j}$$

- 虚位移: 虚位移由广义坐标的虚变 $\delta \theta_1, \delta \theta_2$ 引起:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 = (l_1 \cos \theta_1 \hat{i} - l_1 \sin \theta_1 \hat{j}) \delta \theta_1 \\ \delta \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 \\ &= (l_1 \cos \theta_1 \hat{i} - l_1 \sin \theta_1 \hat{j}) \delta \theta_1 + (l_2 \cos \theta_2 \hat{i} - l_2 \sin \theta_2 \hat{j}) \delta \theta_2 \end{aligned}$$

考虑 d'Alembert 原理, 我们将 $(\mathbf{F}_1 - m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot \delta \mathbf{r}_1 + (\mathbf{F}_2 - m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2) \cdot \delta \mathbf{r}_2 = 0$ 展开。

• 主动力虚功 $\sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 = (m_1 g \hat{j}) \cdot (l_1 \cos \theta_1 \hat{i} - l_1 \sin \theta_1 \hat{j}) \delta \theta_1 = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 &= (m_2 g \hat{j}) \cdot [(l_1 \cos \theta_1 \hat{i} - l_1 \sin \theta_1 \hat{j}) \delta \theta_1 + (l_2 \cos \theta_2 \hat{i} - l_2 \sin \theta_2 \hat{j}) \delta \theta_2] \\ &= -m_2 g l_1 \sin \theta_1 \delta \theta_1 - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 \end{aligned}$$

$$\sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = [-(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1] \delta \theta_1 + [-m_2 g l_2 \sin \theta_2] \delta \theta_2$$

• 惯性力虚功 $-\sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$:

$$-m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 = -m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \delta \theta_1$$

$$\begin{aligned} -m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 &= -m_2 [l_1^2 \ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \delta \theta_1 \\ &\quad - m_2 [l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)] \delta \theta_2 \end{aligned}$$

将主动力虚功和惯性力虚功的各项相加, 并按 $\delta \theta_1$ 和 $\delta \theta_2$ 重新组合。由于 $\delta \theta_1$ 和 $\delta \theta_2$ 是相互独立的任意虚位移, 它们的系数必须分别等于零。

$$\begin{aligned} &-(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 - m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{aligned}$$

$$-m_2 g l_2 \sin \theta_2 - m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

整理后得到最终的运动方程:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0$$

7. 质量为 m 、半径为 a 的均匀圆盘, 直立在斜坡上. 圆盘沿斜坡直线滚下, 运动中圆盘与斜坡的接触点无滑动. 试利用 d'Alembert 原理写出圆盘的运动方程.

解答

设斜面倾角为 α 。我们选取沿斜面向下为 x 轴正方向，广义坐标为圆盘质心沿 x 轴的位移 x 。圆盘顺时针转动的角度为 θ 。

- **质心运动**: 质心的位置矢量 $\mathbf{r}_C = x\hat{i}$ ，加速度为 $\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{x}\hat{i}$ 。
- **转动运动**: 圆盘的角加速度为 $\ddot{\theta}$ 。
- **无滑动约束**: 质心的速度与角速度满足关系 $\dot{x} = a\dot{\theta}$ 。因此，加速度之间也满足 $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$ 。
- **虚位移约束**: 虚位移之间满足同样的关系 $\delta x = a\delta\theta$ 。

对于理想约束（静摩擦力和法向支持力不做虚功），我们只需考虑主动力——重力。

- **主动力 $\mathbf{F}_{\text{active}}$** : 只有重力沿斜面的分量 $mg \sin \alpha$ 会在 δx 的虚位移上做功。因此 $F_{\text{active},x} = mg \sin \alpha$ 。
- **主动力矩 $\tau_{\text{active},C}$** : 重力作用在质心上，因此它对质心的力矩为零。 $\tau_{\text{active},C} = 0$ 。
- **惯性力**: $-m\ddot{\mathbf{r}}_C = -m\ddot{x}\hat{i}$ 。
- **惯性力矩**: $-I_C\ddot{\theta}$ 。对于均匀圆盘，其绕质心的转动惯量 $I_C = \frac{1}{2}ma^2$ 。

我们将各项代入 d'Alembert 原理的方程中。所有运动都在 x 方向，因此点积可以直接写成标量乘积。

$$(F_{\text{active},x} - m\ddot{x})\delta x + (\tau_{\text{active},C} - I_C\ddot{\theta})\delta\theta = 0$$

代入具体表达式，利用约束关系 $\delta\theta = \delta x/a$ 和 $\ddot{\theta} = \ddot{x}/a$ 来消去 θ 相关的变量，使得方程中只含有独立的虚位移 δx ：

$$(mg \sin \alpha - m\ddot{x})\delta x - \left(\frac{1}{2}ma^2\frac{\ddot{x}}{a}\right)\frac{\delta x}{a} = 0$$

$$(mg \sin \alpha - m\ddot{x} - \frac{1}{2}m\ddot{x})\delta x = 0$$

由于虚位移 δx 是任意的，其系数必须为零：

$$mg \sin \alpha - m\ddot{x} - \frac{1}{2}m\ddot{x} = 0$$

整理后得到最终的运动方程与质心加速度：

$$mg \sin \alpha = \frac{3}{2}m\ddot{x}, \quad \ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$