

# 理论力学作业 04 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

## 2. 已知法夫形式

$$\omega \equiv dx + x dy + 2xz dz$$

(1) 利用弗罗本尼斯定理检验  $\omega$  是否可积。

(2) 是否存在函数  $f(x, y, z)$ , 使得

$$df = \omega$$

成立?

(3\*) 寻找合适的积分因子  $\varphi(x, y, z)$ , 使得

$$\varphi(x, y, z)\omega \equiv dg(x, y, z)$$

是全微分, 并求出  $g(x, y, z) = \int \varphi(x, y, z)\omega$ 。(这一小题选做, 可不答)

提示: (1) 可以利用  $d(\varphi\omega) = 0$  求出  $\varphi$  满足的 3 个线性偏微分方程; (2) 然后令  $\varphi(x, y, z) \equiv A(x)B(y)C(z)$  代入微分方程组, 求出分离变量解  $\varphi(x, y, z)$ ; (3) 指定  $\varphi(x, y, z)$  中的积分常数, 得到一个比较简单的表达式; (4) 对  $\varphi\omega$  积分, 求得  $g(x, y, z)$ 。

### Solution

(1)

$$d\omega = dx \wedge dy + 2z dx \wedge dz$$

$$\begin{aligned}\omega \wedge d\omega &= (dx + xdy + 2xzdz) \wedge (dx \wedge dy + 2zdx \wedge dz) \\ &= 2xzd z \wedge dx \wedge dy + 2xzd y \wedge dx \wedge dz \\ &= 0\end{aligned}$$

根据弗罗本尼斯定理知,  $\omega$  可积

## Solution

(2) 由于  $d\omega \neq 0$ , 故不存在函数  $f(x, y, z)$ , 使得  $df = \omega$  成立

(3)

$$\begin{aligned}
 d(\varphi\omega) &= \partial_i \varphi dx_i \wedge \omega + \varphi d\omega \\
 &= \partial_x \varphi (x dx \wedge dy + 2xz dx \wedge dz) + \partial_y \varphi (dy \wedge dx + 2xz dy \wedge dz) \\
 &\quad + \partial_z \varphi (dz \wedge dx + x dz \wedge dy) + \varphi (dx \wedge dy + 2z dx \wedge dz) \\
 &= (x \partial_x \varphi - \partial_y \varphi + \varphi) dx \wedge dy + (2xz \partial_y \varphi - x \partial_z \varphi) dy \wedge dz + \\
 &\quad (-2xz \partial_x \varphi + \partial_z \varphi - 2z \varphi) dz \wedge dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

设  $\varphi$  有分离变量解, 令  $\varphi(x, y, z) \equiv A(x)B(y)C(z)$ , 代入方程组得:

$$\begin{aligned}
 x \frac{A'}{A} - \frac{B'B}{C} &= 0 \\
 2z \frac{B'}{B} &= \frac{C'}{C} \\
 2xz \frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} + 2z &= 0
 \end{aligned}$$

从第二个方程入手, 有  $\frac{B'}{B} = \frac{C'}{2zC}$ , 由于方程左边为  $y$  的函数, 右侧为  $z$  的函数, 二者相等只能等于一常数, 记为  $K_1$ , 得

$$B = B_0 e^{k_1 y}$$

$$C = C_0 e^{k_1 z^2}$$

将  $B$  的表达式代入第一个方程得到  $A$  的表达式:

$$A = A_0 x^{k_1 - 1}$$

容易验证  $A$ 、 $C$  表达式和第三个方程相容。故

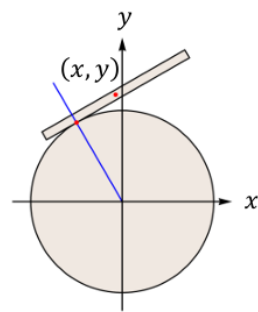
$$\varphi = A \cdot B \cdot C = \varphi_0 x^{k_1 - 1} e^{k_1 y + k_1 z^2}$$

以下两题选做其一：

3. 如图，一均匀薄板厚度可忽略不计，放在一个粗糙的圆柱体上作纯滚动，长方形的一个边与圆柱体的轴向平行。圆柱体的半径为  $r$ ，中心位于坐标原点。薄板质心的坐标是  $(x, y)$ ，薄板与水平方向的夹角为  $\theta$ 。

(1) 以  $(x, y, \theta)$  为广义坐标，写出系统满足的 2 个约束方程：1 个代数方程（板与柱面接触）和 1 个微分方程（接触点处无滑动）。

(2) 如果利用几何约束消去  $\theta$ ，选用  $(x, y)$  作为广义坐标，写出  $(x, y)$  满足的约束方程。



### Solution

(1) 由于板与柱面接触，接触点为  $(-r \sin \theta, r \cos \theta)$ ，故

$$\frac{y - r \cos \theta}{x + r \sin \theta} = \tan \theta$$

由于接触点无滑动，即接触点  $(x - l \cos \theta, y - l \sin \theta)$  切向速度为 0：

$$(dx + l d\theta \sin \theta, dy - l d\theta \cos \theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 0$$

得微分约束：

$$dx \cos \theta + dy \sin \theta = 0$$

(2) 由 (1) 的几何约束得，

$$y \cos \theta - x \sin \theta = r$$

从中反解出：

$$\cos \theta = \frac{yr + x\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{x^2 + y^2}$$

代入到微分约束中即为  $(x, y)$  满足的约束方程

4. 四轮小车作平面平行运动。设车体驾驶座相对于地面参考系的直角坐标是  $(x, y)$ ，车头朝向与  $x$ -轴的夹角为  $\theta$ 。

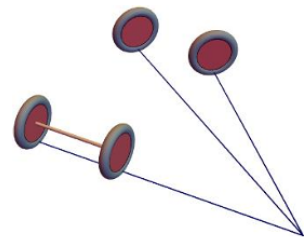
小车的一对前轮为导向轮，后轮为从动轮；导向轮可以相对于车身方向有偏转角，而从动轮则不能。

(1) 阿克曼 (Ackman) 转向机构能使四个车轮在转向时均作无滑动滚动。写出约束方程。所需的参数，例如前后轮的轴距、一对轮子的轮间距等，可自己引进。

(2) 如果只关心车辆的位置和朝向，请从上一小题得到的方程，导出广义坐标  $(x, y, \theta)$  之间的约束关系。

(3) 广义坐标  $(x, y, \theta)$  满足的约束方程是否完全可积？

(4\*) 假设地平面无障碍物，在  $t = 0$  时刻小车的位姿是  $(x_0, y_0, \theta_0)$ 。小车能否通过运动到达任意状态  $(x, y, \theta)$ ？（这一小题是拓展思考，可以不答）



### Solution

(1) 设驾驶座位于车的正中心，坐标为  $(x, y)$ ，轮间距为  $2l$ ，前后轮距离为  $2L$ ，前轮偏转角为  $\psi$ ，轮的半径为  $a$ ，第  $i$  个轮自转的角度为  $\varphi_i$ 。

由无滑滚动条件，对于后轮：

$$d[(x - L \cos \theta, y - L \sin \theta) \pm l(\sin \theta, -\cos \theta)] - a d\varphi_i(\cos \theta, \sin \theta) = 0$$

对于前轮：

$$d[(x + L \cos \theta, y + L \sin \theta) \pm l(\sin \theta, -\cos \theta)] - a d\varphi_i(\cos(\theta - \psi), \sin(\theta - \psi)) = 0$$

即约束方程为：

$$dx + Ld\theta \sin \theta \pm ld\theta \cos \theta - a \cos \theta d\varphi_i = 0$$

$$dy - Ld\theta \cos \theta \pm ld\theta \sin \theta - a \sin \theta d\varphi_i = 0$$

$$dx - Ld\theta \sin \theta \pm ld\theta \cos \theta - a \cos(\theta - \psi) d\varphi_i = 0$$

$$dy + Ld\theta \cos \theta \pm ld\theta \sin \theta - a \sin(\theta - \psi) d\varphi_i = 0$$

## Solution

(2) 对于 (1) 中第一个约束方程, 把 +-两式相比得:

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{dx + Ld\theta \sin \theta + ld\theta \cos \theta}{dxLd\theta \sin \theta - ld\theta \cos \theta}$$

同理对于第二个约束方程也有类似式子:

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{dy - Ld\theta \cos \theta + ld\theta \sin \theta}{dy - Ld\theta \cos \theta - ld\theta \sin \theta}$$

两式消去  $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$ , 得

$$\cos \theta dy = \sin \theta dx + Ld\theta$$

(本题若将 (x,y) 设置为两个后轮中点则得到老师讲义上的方程:  $\cos \theta dy = \sin \theta dx$ )

(3) 约束方程的法夫形式为:

$$\omega = \sin \theta dx - \cos \theta dy + Ld\theta$$

$$d\omega = \cos \theta d\theta \wedge dx + \sin \theta d\theta \wedge dy$$

$$\omega \wedge d\omega = dx \wedge d\theta \wedge dy \neq 0$$

故约束方程不完全可积

(4) Chow's theorem: 如果系统  $\dot{q} = \Sigma_i u_i g_i(q)$  满足: 由  $g_i, g_j$  通过反复取李括号生成的分布在  $q_0$  的邻域内维数等于  $n$  (系统的完整坐标数); 那么系统是小范围可控的 (可以从  $q_0$  到达任意足够近的点)。

将 (x,y) 设置为两个后轮中点, 由  $\cos \theta dy = \sin \theta dx$ , 可取  $x = v \cos \theta, y = v \sin \theta$ , 故

$$g_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = (x, y, \theta)^T$$

计算李括号:

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} =: g_3(q)$$

计算行列式:

$$\det[g_1, g_2, g_3] = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

故系统满足 Chow's theorem, 小车可以在给定初始状态下达到任意状态