

理论力学 A

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 10 月 8 日

作业 03 参考答案

11. 利用球坐标的自然基（无需归一化）

$$\mathbf{e}_r \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_\varphi \triangleq \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}.$$

(1) 计算度规矩阵 $g_{\alpha\beta} \triangleq \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$ ，以及逆矩阵 $g^{\alpha\beta}$ 。

(2) 验证自然基的第二正交关系 $g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta^T = \mathbf{1}_{3 \times 3}$ 。

(3) 计算 $\sqrt{\det g}$ ，并与积分测度对比。积分测度即体积元

$$dV = \rho(r, \theta, \varphi) dr d\theta d\varphi$$

中的权重 $\rho(r, \theta, \varphi)$ 。

解答

(1) 首先，写出笛卡尔坐标与球坐标的关系：

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

计算自然基矢：

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta),$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

计算度规矩阵 $g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta$ 。由于基矢是正交的，我们只需计算对角元：

$$g_{rr} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1,$$

$$g_{\theta\theta} = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2,$$

$$g_{\varphi\varphi} = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta.$$

所以度规矩阵为：

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

逆矩阵 $g^{\alpha\beta}$ 就是对对角元取倒数：

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}.$$

(2) 第二正交关系是 $g^{rr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^\top + g^{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta^\top + g^{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi^\top = \mathbf{1}$. 注意到 $g^{\alpha\alpha} = 1/g_{\alpha\alpha} = 1/|\mathbf{e}_\alpha|^2$. 令 $\hat{\mathbf{e}}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha/|\mathbf{e}_\alpha|$ 为归一化的标准基矢.

$$g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta^\top = \sum_\alpha g^{\alpha\alpha} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha^\top = \sum_\alpha \frac{1}{|\mathbf{e}_\alpha|^2} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha^\top = \sum_\alpha \left(\frac{\mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{e}_\alpha|} \right) \left(\frac{\mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{e}_\alpha|} \right)^\top = \sum_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha^\top.$$

这正是完备性关系，对于任意正交归一基，其结果都为单位矩阵 $\mathbf{1}_{3 \times 3}$.

(3) 计算行列式：

$$\det(g) = g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi} = 1 \cdot r^2 \cdot r^2 \sin^2 \theta = r^4 \sin^2 \theta,$$

取平方根：

$$\sqrt{\det g} = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} = r^2 \sin \theta.$$

体积元的表达式为 $dV = \rho(r, \theta, \varphi) dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. 对比可知，积分测度 $\rho(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$ ，这与我们计算的 $\sqrt{\det g}$ 完全一致.

12. 狭义相对论的时空又称闵可夫斯基时空，其度规矩阵为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

时空坐标 x^μ 是

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z),$$

在自然单位制下 $c = 1$.

(1) 两个相邻时空点的坐标差是

$$x'^\mu - x^\mu = dx^\mu,$$

$$(dx^\mu) = (dt, dx, dy, dz).$$

计算时空间隔（固有时 $d\tau$ ）的平方

$$(d\tau)^2 \triangleq g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ?$$

(2) 计算协变四矢量 x_μ 的分量 $(x_0, x_1, x_2, x_3) = ?$

(3) 可以证明, 保持元时不变的连续变换

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

只能是非齐次线性变换

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

上式中常数 a^μ 表示时空平移的距离, 矩阵 Λ^μ_ν 表示齐次洛伦兹变换。作为特例, 在齐次洛伦兹变换下, 任意四矢量 x^μ 的变换为

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

该变换保持模长不变,

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$$

利用上述式, 证明洛伦兹变换保持四矢量的内积不变,

$$a'^\mu b'_\mu = a^\mu b_\mu$$

(提示: 令 $x^\mu = a^\mu + b^\mu$)

(4) 利用 (3) 的结论, 证明 $\Lambda^\top \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}$.

解答

(1) 时空间隔的平方是 (应用爱因斯坦求和约定):

$$\begin{aligned}(d\tau)^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \\ &= 1 \cdot (cdt)^2 + (-1) \cdot (dx)^2 + (-1) \cdot (dy)^2 + (-1) \cdot (dz)^2 \\ &= c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2\end{aligned}$$

(2) 协变四矢量 $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$.

$$\begin{aligned}x_0 &= g_{0\nu} x^\nu = g_{00} x^0 = 1 \cdot ct = ct \\ x_1 &= g_{1\nu} x^\nu = g_{11} x^1 = -1 \cdot x = -x \\ x_2 &= g_{2\nu} x^\nu = g_{22} x^2 = -1 \cdot y = -y \\ x_3 &= g_{3\nu} x^\nu = g_{33} x^3 = -1 \cdot z = -z\end{aligned}$$

所以 $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$.

(3) 洛伦兹变换保持任意四矢量的模长不变, 即 $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$. 令 $x^\mu = a^\mu + b^\mu$. 根据模长不变性:

$$(a'^\mu + b'^\mu)(a'_\mu + b'_\mu) = (a^\mu + b^\mu)(a_\mu + b_\mu)$$

展开两边：

$$a'^{\mu}a'_{\mu} + a'^{\mu}b'_{\mu} + b'^{\mu}a'_{\mu} + b'^{\mu}b'_{\mu} = a^{\mu}a_{\mu} + a^{\mu}b_{\mu} + b^{\mu}a_{\mu} + b^{\mu}b_{\mu}$$

由于内积是对称的 ($a^{\mu}b_{\mu} = b^{\mu}a_{\mu}$)，上式简化为：

$$a'^{\mu}a'_{\mu} + 2a'^{\mu}b'_{\mu} + b'^{\mu}b'_{\mu} = a^{\mu}a_{\mu} + 2a^{\mu}b_{\mu} + b^{\mu}b_{\mu}$$

又因为模长不变性分别适用于 a^{μ} 和 b^{μ} ，即 $a'^{\mu}a'_{\mu} = a^{\mu}a_{\mu}$ 和 $b'^{\mu}b'_{\mu} = b^{\mu}b_{\mu}$ 。从上式中减去这两项，得到：

$$2a'^{\mu}b'_{\mu} = 2a^{\mu}b_{\mu} \implies a'^{\mu}b'_{\mu} = a^{\mu}b_{\mu}$$

证毕。

- (4) 四矢量的内积 $x^{\mu}x_{\mu}$ 可以用矩阵形式写作 $\mathbf{x}^{\top}\mathbf{g}\mathbf{x}$ 。洛伦兹变换为 $\mathbf{x}' = \Lambda\mathbf{x}$ 。内积在洛伦兹变换下不变，所以：

$$\mathbf{x}'^{\top}\mathbf{g}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{\top}\mathbf{g}\mathbf{x}$$

将 $\mathbf{x}'$ 代入左边：

$$(\Lambda\mathbf{x})^{\top}\mathbf{g}(\Lambda\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\top}\mathbf{g}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^{\top}\Lambda^{\top}\mathbf{g}\Lambda\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\top}\mathbf{g}\mathbf{x}$$

由于此等式对任意矢量 $\mathbf{x}$ 都成立，所以矩阵本身必须相等：

$$\Lambda^{\top}\mathbf{g}\Lambda = \mathbf{g}$$

证毕。

此题选做：

13. 半径为 1 的球面是一个 2 维黎曼空间。以纬度 θ 和经度 φ 作为流形的坐标参数，计算度规矩阵 ($g_{\mu\nu}$) 以及逆矩阵 ($g^{\mu\nu}$)。

解答

对于半径为 1 的球面，使用球坐标参数，其中 θ 是极角（纬度，从北极测量，范围 $0 \leq \theta \leq \pi$ ）， φ 是方位角（经度，范围 $0 \leq \varphi < 2\pi$ ）。从三维欧几里得空间诱导的线元为：

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

因此，度规矩阵为：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

逆矩阵可以通过求逆得到：

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

第二章拉格朗日力学

1. 一根右手螺旋形的钢丝沿垂直方向放置, 螺距为 d , 半径为 l . 质量为 m 的珠子被穿在钢丝上, 钢丝和珠子之间的摩擦系数为 μ . 在重力作用下, 设摩擦力不足以阻止珠子下滑.

- (1) 写出珠子满足的两个约束方程.
- (2) 分别写出这两个约束面的法向量.
- (3) 引进待定乘子, 写出珠子所受的约束力.
- (4) 根据牛顿第二定律, 写出珠子的运动方程.

解答

(1) 第一个约束是珠子在半径为 l 的圆柱面上运动. 在笛卡尔坐标系中, 方程为:

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

第二个约束是螺旋线, 螺距为 d . 这表示 z 坐标与方位角 $\phi = \arctan(y/x)$ 成正比, 即 $z = \frac{d}{2\pi}\phi$. 由此可得:

$$f_2(x, y, z) = \tan\left(\frac{2\pi z}{d}\right) - \frac{y}{x} = 0$$

(2) 法向量由约束方程的梯度给出 $\mathbf{n} = \nabla f$. 对于第一个约束面 (圆柱面):

$$\mathbf{n}_1 = \nabla f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 0)$$

可取其方向为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, 0)$. 对于第二个约束面 (螺旋面):

$$\mathbf{n}_2 = \nabla f_2 = \left(\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}, \frac{2\pi}{d} \sec^2\left(\frac{2\pi z}{d}\right) \right)$$

利用 $y/x = \tan(2\pi z/d)$ 和 $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, 以及 $x^2 + y^2 = l^2$, 可将 $\mathbf{n}_2$ 化简为与 $\left(\frac{y}{l^2}, -\frac{x}{l^2}, \frac{2\pi}{d} \right)$ 同向.

(3) 约束力 (法向支持力) $\mathbf{F}_N$ 垂直于螺旋线, 因此是两个约束面法向量的线性组合:

$$\mathbf{F}_N = \lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2$$

其中 λ_1, λ_2 是待定乘子 (拉格朗日乘子).

- (4) 珠子受三个力：重力 $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z$ ，法向约束力 $\mathbf{F}_N$ ，以及摩擦力 $\mathbf{F}_f$ 。摩擦力与运动方向相反，大小为 $\mu|\mathbf{F}_N|$ 。设珠子的速度为 $\mathbf{v}$ ，则 $\mathbf{F}_f = -\mu|\mathbf{F}_N|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ 。牛顿第二定律方程为：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_f$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z + \lambda_1\mathbf{n}_1 + \lambda_2\mathbf{n}_2 - \mu|\lambda_1\mathbf{n}_1 + \lambda_2\mathbf{n}_2|\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

这是一个包含两个约束方程和三个坐标分量的微分方程系统，可以通过求解 λ_1, λ_2 来确定运动。