

记号约定 (Notation Convention)

为保证公式清晰、无歧义，本文档遵循以下标准数学记号约定：

- **标量 (Scalars):** 使用斜体字母表示，例如质量 m 、时间 t 、角度 θ 。
- **矢量 (Vectors):** 使用粗体 (`\boldsymbol`) 的小写字母 (如 $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{e}$) 或小写黑斜体 (如 $\boldsymbol{a}$) 表示。¹
- **矩阵与二阶张量 (Matrices & Second-Order Tensors):** 使用大写正黑体 (`\mathbf`) 字母表示，例如转动矩阵 $\mathbf{R}$ 。对于张量，也常使用大写黑斜体以示区别，如应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 。特别地，我们用 $\mathbf{1}_{n \times n}$ (`\mathds{1}`) 表示 n 阶单位矩阵 (无歧义下会省略 $n \times n$)。
- **矢量与张量的分量 (Components of Vectors & Tensors):** 使用带下标的相应斜体字母表示。例如：
 - 矢量 $\mathbf{v}$ 的第 i 个分量为 v_i 。
 - 矩阵 $\mathbf{R}$ 的第 i 行 j 列元素为 R_{ij} 。
 - 二阶张量 $\mathbf{T}$ 的分量为 T_{ij} 。
- **标准正交基 (Standard Orthogonal Basis):** 笛卡尔坐标系下的标准正交基矢表示为 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。
- **特殊符号 (Special Symbols):**
 - 克罗内克符号 (Kronecker Delta): δ_{ij} 。
 - 列维-奇维塔符号 (Levi-Civita Symbol): ϵ_{ijk} 。
- **爱因斯坦求和约定 (Einstein Summation Convention):** 文中默认使用此约定。当一个指标在单项乘积中重复出现两次时，表示对该指标的所有可能取值（在三维空间中为 1, 2, 3）进行求和。例如：

$$\begin{aligned}
 - a_i b_i &\equiv \sum_{i=1}^3 a_i b_i \\
 - T_{ij} v_j &\equiv \sum_{j=1}^3 T_{ij} v_j
 \end{aligned}$$

¹实际上也有用 `\mathbf` 来表示矢量的 (如 $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{e}$)，不失为一种风格，本作业参考答案遵从朱老师原作业文档的习惯，采用 `\boldsymbol` 表示矢量。

理论力学 A

第一章作业参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2025 年 9 月 25 日

以下两题选做其一

1. 已知三维欧氏空间的标准基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 构成右手系. 对坐标架作如下两步变换: (1) 绕 $\mathbf{e}_3$ 旋转 45° , (2) 随后对水平面 ($\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ 平面) 作镜面反射.

写出总的坐标变换矩阵

$$S_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j,$$

并计算行列式 $\det S$.

解答

第一步：绕 $\mathbf{e}_3$ 旋转 45° . 这是一个被动变换，即坐标系旋转，矢量不动. 如果坐标系绕轴 $\mathbf{n}$ 转过角度 θ ，则矢量在新坐标系中的分量变换等效于将矢量绕轴 $\mathbf{n}$ 转过角度 $-\theta$ (主动变换). 因此，旋转变换矩阵 $\mathbf{R}$ 对应于绕 $\mathbf{e}_3$ 旋转 -45° :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) & 0 \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第二步：对 $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ 平面作镜面反射. 这意味着新坐标系的 $\mathbf{e}'_3$ 轴与原 $\mathbf{e}_3$ 轴反向，即 $\mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_3$. 该变换的矩阵为:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

总变换矩阵. 总的变换是先旋转后反射，所以总变换矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{MR}$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算行列式. 利用行列式性质 $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$:

$$\det(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{M}) \det(\mathbf{R}) = (-1) \times (1) = -1.$$

2. 已知并矢

$$\mathbf{R} = \cos \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - \sin \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1),$$

和质点的位移矢量

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

求两者的内积

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}.$$

解答

1. 计算 $\mathbf{x}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}$ 利用并矢与矢量的内积法则 $(\mathbf{a}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ 和基矢的正交性 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= [\cos \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - \sin \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)] \cdot (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \\ &= \cos \theta [\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x})] - \sin \theta [\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x})] \\ &= \cos \theta (\mathbf{e}_1 x + \mathbf{e}_2 y) - \sin \theta (\mathbf{e}_1 y - \mathbf{e}_2 x) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (y \cos \theta + x \sin \theta) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

2. 计算 $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}$ 利用法则 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \cdot [\cos \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - \sin \theta (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1)] \\ &= \cos \theta [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2] - \sin \theta [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1] \\ &= \cos \theta (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) - \sin \theta (x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1) \\ &= (x \cos \theta + y \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (y \cos \theta - x \sin \theta) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

3. 设方阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 分别满足特征方程

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$B\mathbf{y}_k = \mu_k \mathbf{y}_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

- 找出矩阵 $A \otimes B$ 的全部特征值.
- 找出矩阵 $A \otimes \mathbf{1}_{n \times n} + \mathbf{1}_{m \times m} \otimes B$ 的全部特征值.

解答

1. 考虑 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 作用于由 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的特征向量构成的张量积向量 $\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k$ 上. 利

用张量积的混合乘积性质 $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) &= (\mathbf{Ax}_j) \otimes (\mathbf{By}_k) \\ &= (\lambda_j \mathbf{x}_j) \otimes (\mu_k \mathbf{y}_k) \\ &= (\lambda_j \mu_k)(\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) \end{aligned}$$

这是一个特征值方程，其特征向量为 $\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k$ ，对应的特征值为 $\lambda_j \mu_k$ 。

2. 同样，考虑该矩阵作用于 $\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k$ 上：

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_n + \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{B})(\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{1}_n)(\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) + (\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{B})(\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) \\ &= (\mathbf{Ax}_j) \otimes (\mathbf{1}_n \mathbf{y}_k) + (\mathbf{1}_m \mathbf{x}_j) \otimes (\mathbf{By}_k) \\ &= (\lambda_j \mathbf{x}_j) \otimes \mathbf{y}_k + \mathbf{x}_j \otimes (\mu_k \mathbf{y}_k) \\ &= \lambda_j (\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) + \mu_k (\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) \\ &= (\lambda_j + \mu_k)(\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k) \end{aligned}$$

这是一个特征值方程，其特征向量为 $\mathbf{x}_j \otimes \mathbf{y}_k$ ，对应的特征值为 $\lambda_j + \mu_k$ 。

以下两题选做其一

4. 四阶张量 P_{ijkl} 在缩并后记成

$$Q_{ij} \triangleq P_{ijkk}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

证明在新标准基 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ 下的分量

$$Q'_{ij} = R_{im} R_{jn} Q_{mn},$$

成立，即缩并的结果 Q_{ij} 是二阶张量。

解答

四阶张量 P_{ijkl} 的坐标变换法则：

$$P'_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{ko} R_{lp} P_{mnop},$$

在新坐标系下，根据定义写出 Q'_{ij} ：

$$Q'_{ij} = P'_{ijkk}$$

将 P'_{ijkk} 的变换法则代入上式：

$$Q'_{ij} = R_{im} R_{jn} R_{ko} R_{kp} P_{mnop}.$$

注意到上式中出现了转动矩阵的乘积项 $R_{ko}R_{kp}$ ，并对其哑指标 k 求和。利用转动矩阵的正交性 $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}$ ，有 $R_{ko}R_{kp} = \delta_{op}$ 。将正交关系代入，替换 $R_{ko}R_{kp}$ ：

$$Q'_{ij} = R_{im}R_{jn}\delta_{op}P_{mnop} = R_{im}R_{jn}P_{mnoo} = R_{im}R_{jn}Q_{mn}.$$

5. 对称张量满足

$$S_{ij} = S_{ji},$$

在转动之后的张量分量 S'_{ij} 仍然是对称的

$$S'_{ij} \equiv S'_{ji}.$$

同样可证，反对称张量 ($A_{ij} = -A_{ji}$) 在转动后仍然是反对称张量 ($A'_{ij} \equiv -A'_{ji}$)。

解答

二阶张量 S_{ij} 的坐标变换法则：

$$S'_{ij} = R_{ik}R_{jl}S_{kl}$$

其转置 S'_{ji} 的表达式：

$$S'_{ji} = R_{jk}R_{il}S_{kl}$$

交换上式中的哑指标 k 和 l ：

$$S'_{ji} = R_{jl}R_{ik}S_{lk}$$

利用原坐标系下张量的对称性， $S_{lk} = S_{kl}$ ：

$$S'_{ji} = R_{jl}R_{ik}S_{kl}$$

重新整理乘积项的顺序：

$$S'_{ji} = R_{ik}R_{jl}S_{kl} = S'_{ij}$$

这表明变换后的张量分量仍然是对称的。