

理论力学 A

作业 31 参考答案

学期：2025 秋

助教：于洪飞，张积翔

日期：2026 年 1 月 8 日

第七章刚体力学

4. 陀螺以常速绕第 3 轴自转，同时第 3 轴以常速绕惯性系 z 轴进动，两个轴的夹角保持为常数 θ . 求总角速度的大小和方向.

解答

设惯性系 z 轴的单位矢量为 $\mathbf{k}$ ，刚体第 3 轴（对称轴）的单位矢量为 $\mathbf{e}_3$. 根据题意，进动角速度为 $\boldsymbol{\omega}_p = \omega_p \mathbf{k}$ ，自转角速度为 $\boldsymbol{\omega}_s = \omega_s \mathbf{e}_3$. 且两个轴的夹角为 θ ，即 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \theta$.

总角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为进动角速度与自转角速度的矢量和：

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_s = \omega_p \mathbf{k} + \omega_s \mathbf{e}_3$$

1. 总角速度的大小：利用余弦定理计算矢量模长：

$$\omega = |\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{(\omega_p \mathbf{k} + \omega_s \mathbf{e}_3) \cdot (\omega_p \mathbf{k} + \omega_s \mathbf{e}_3)}$$

展开得：

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2 + 2\omega_p \omega_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3)} = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2 + 2\omega_p \omega_s \cos \theta}$$

2. 总角速度的方向：总角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 位于由进动轴 $\mathbf{k}$ 和自转轴 $\mathbf{e}_3$ 构成的平面内. 我们可以用 $\boldsymbol{\omega}$ 与第 3 轴（自转轴 $\mathbf{e}_3$ ）的夹角 α 来描述其方向.

$$\cos \alpha = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_3}{|\boldsymbol{\omega}|} = \frac{(\omega_p \mathbf{k} + \omega_s \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3}{\omega} = \frac{\omega_p \cos \theta + \omega_s}{\sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2 + 2\omega_p \omega_s \cos \theta}}$$

或者用正弦值表示（利用叉乘）：

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3| = |\omega_p \mathbf{k} \times \mathbf{e}_3| = \omega_p \sin \theta$$

$$\sin \alpha = \frac{\omega_p \sin \theta}{\sqrt{\omega_p^2 + \omega_s^2 + 2\omega_p \omega_s \cos \theta}}$$

即方向与自转轴夹角为 $\alpha = \arcsin \left(\frac{\omega_p \sin \theta}{\omega} \right)$.

5. 半径为 R 的非均匀球, 密度分布为

$$\rho = \rho_0 \left(1 - a \frac{r^2}{R^2} \right),$$

其中 r 表示到球心的距离, ρ_0 和 a 是常数. 取球面上的一个点为基点, 求主转动惯量.

解答

设球心为 C , 基点为 P (位于球面上, 即 $CP = R$). 由于球具有球对称性, 球心 C 处的惯量张量是对角的, 且三个主转动惯量相等, 记为 I_C .

1. 计算球的质量 M :

$$\begin{aligned} M &= \int_V \rho dV = \int_0^R \rho_0 \left(1 - a \frac{r^2}{R^2} \right) 4\pi r^2 dr \\ M &= 4\pi \rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{a}{R^2} r^4 \right) dr = 4\pi \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{a}{R^2} \frac{r^5}{5} \right]_0^R \\ M &= 4\pi \rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{5} \right) = \frac{4\pi \rho_0 R^3 (5 - 3a)}{15} \end{aligned}$$

2. 计算绕球心任意轴的转动惯量 I_C : 对于球对称分布, 绕球心任意轴的转动惯量为 $I_{zz} = \int \frac{2}{3} r^2 dm$.

$$\begin{aligned} I_C &= \int_0^R \frac{2}{3} r^2 \cdot \rho(r) 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi \rho_0}{3} \int_0^R r^4 \left(1 - a \frac{r^2}{R^2} \right) dr \\ I_C &= \frac{8\pi \rho_0}{3} \int_0^R \left(r^4 - \frac{a}{R^2} r^6 \right) dr = \frac{8\pi \rho_0}{3} \left[\frac{r^5}{5} - \frac{a}{R^2} \frac{r^7}{7} \right]_0^R \\ I_C &= \frac{8\pi \rho_0 R^5}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{a}{7} \right) = \frac{8\pi \rho_0 R^5 (7 - 5a)}{105} \end{aligned}$$

3. 计算基点 P 处的转动惯量: 取 P 为原点, 建立坐标系. 取 z' 轴沿 PC 连线方向, x', y' 轴在切平面内. 由于系统的对称性, PC 连线是主轴方向之一另外两个垂直于 PC 的轴也是主轴.

利用平行轴定理:

- 对于沿 PC 连线的轴: 该轴通过质心 C , 故转动惯量不变.

$$I_3 = I_C = \frac{8\pi \rho_0 R^5 (7 - 5a)}{105}$$

- 对于垂直于 PC 的轴轴到质心的距离 $d = R$.

$$I_1 = I_2 = I_C + MR^2$$

代入 M 和 I_C 的表达式:

$$I_1 = \frac{8\pi \rho_0 R^5 (7 - 5a)}{105} + \left[\frac{4\pi \rho_0 R^3 (5 - 3a)}{15} \right] R^2$$

$$I_1 = \frac{4\pi\rho_0 R^5}{105} [2(7-5a) + 7(5-3a)]$$

$$I_1 = \frac{4\pi\rho_0 R^5}{105} [14 - 10a + 35 - 21a] = \frac{4\pi\rho_0 R^5(49 - 31a)}{105}$$

结果：主转动惯量为 $I_1 = I_2 = \frac{4\pi\rho_0 R^5(49 - 31a)}{105}$, $I_3 = \frac{8\pi\rho_0 R^5(7 - 5a)}{105}$.

6. 以质心为基点，自由刚体（指不受外力的刚体）的主转动惯量为 I_1, I_2, I_3 .

(1) 取欧拉角为广义坐标，写出拉氏函数.

(2) 写出哈密顿函数.

(3) 写出正则方程.

解答

(1) 拉氏函数

自由刚体不受外力，势能 $V = 0$. 拉氏函数等于动能 T . 以欧拉角 (ψ, θ, ϕ) 为广义坐标. 角速度在体坐标系（主轴系）下的分量 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 与欧拉角的关系为：

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

拉氏函数为：

$$L = T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

(2) 哈密顿函数

首先求广义动量：

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1\omega_1 \cos \psi - I_2\omega_2 \sin \psi$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\omega_3$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1\omega_1 \sin \theta \sin \psi + I_2\omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3\omega_3 \cos \theta$$

为了写出哈密顿函数，需要将 ω_i 用 p_i 表示. 引入中间变量 $L_1 = I_1\omega_1, L_2 = I_2\omega_2, L_3 = I_3\omega_3$ （角动量在体轴上的投影），则哈密顿量形式为：

$$H = T = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

利用上述动量关系解出 L_i :

$$L_3 = p_\psi$$

由 $p_\phi - p_\psi \cos \theta = (L_1 \sin \psi + L_2 \cos \psi) \sin \theta$, 结合 $p_\theta = L_1 \cos \psi - L_2 \sin \psi$, 解得:

$$L_1 = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi + p_\theta \cos \psi$$

$$L_2 = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \cos \psi - p_\theta \sin \psi$$

代入 H 表达式, 得到哈密顿函数:

$$\begin{aligned} H(q, p) = & \frac{1}{2I_1} \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \sin \psi + p_\theta \cos \psi \right)^2 \\ & + \frac{1}{2I_2} \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \cos \psi - p_\theta \sin \psi \right)^2 + \frac{p_\psi^2}{2I_3} \end{aligned}$$

(3) 正则方程

哈密顿正则方程为 $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

1. 坐标演化方程 (即角速度与动量的关系反解):

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi},$$

这里省略了展开形式.

2. 动量演化方程:

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi}$$