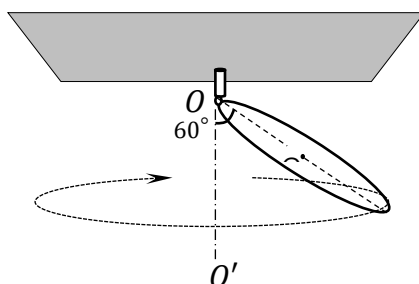


第七章 刚体力学

2026 年 1 月 8 日 星期四

7. 质量为 m 、半径为 a 的均质圆环上的一点由铰链固定在天花板上的 O 点。设 OO' 是向下的竖直垂线，圆环中心为 C 点。圆环运动时始终有 $\angle COO' = 60^\circ$ ，且圆环所处的平面始终与 $\angle COO'$ 所在的平面相垂直。



- (1) 求圆环定点转动的角速度。
- (2) 求圆环角动量的大小。
- (3) 求圆环所受 O 点的作用力。

8. 质量为 m 的拉格朗日陀螺，即重力场中绕定点转动的对称重陀螺，三个主转动惯量为 $I_1 = I_2 \neq I_3$ ，质心到固定点的距离为 l 。

- (1) 选取三个欧拉角作为广义坐标，写出哈密顿函数 $H(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ 。
- (2) 利用哈密顿-雅可比方程，求哈密顿主函数 $S(t, \phi, \theta, \psi)$ 。（可保留积分形式，无需求积）

9. 一个均匀圆锥体的密度为 ρ ，底部的圆半径为 R ，高为 h 。

- (1) 求相对于圆锥顶点的主转动惯量 I_1, I_2, I_3 （其中 I_3 对应圆锥的对称轴）。
- (2) 以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺的拉氏量及三个守恒量（可以把 $I_1 = I_2 = I$ 和 I_3 当作已知常数，无需把上题结果代入）。
- (3) 重对称陀螺能够均匀进动（章动角 θ 和进动角速度 $\dot{\phi}$ 保持不变）。以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺可以均匀进动的角速度 $\dot{\phi}$ ，并给出存在均匀进动的条件（表达式中保留 I_3 和章动角 θ ）。