

第六章 哈密顿力学

2025 年 12 月 18 日星期四

12. 单自由度系统的拉格朗日函数为

$$L(t, q, \dot{q}) = \dot{q}^2 \sin^2 t + q \dot{q} \sin 2t + q^2$$

其中

$$\dot{q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq}{dt}$$

(1) 求与 q 共轭的广义动量 p ，以及相应的哈密顿函数 $H(t, q, p)$ 。

(2) 根据求得的哈密顿函数 $H(t, q, p)$ ，写出哈密顿方程。

(3) 给出一个正则变换 $(q, p) \mapsto (Q, P)$ ，使得变换后的哈密顿量 K 守恒。(提示：①可以考虑在拉氏框架下的坐标变换；②变换不唯一)

13. 利用正则变换的辛条件，分别判断相空间点变换

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

以及

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

是不是正则变换？

14. 已知二维相空间点变换

$$Q = aq^2 + bp^2, \quad P = \arctan \frac{cp}{q}$$

是正则变换，求 a, b 。

15. 用泊松括号检验

$$Q = q + t \cos p, \quad P = p$$

是否为正则变换。