

第五章 微振动

2025 年 12 月 2 日星期二

以下三题选做其一：

7. 已知 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，证明恒等式

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_{n \times n}$$

8. 已知 2 阶方阵

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{12} & \frac{7\pi}{12} \\ \frac{5\pi}{12} & \frac{11\pi}{12} \end{pmatrix}$$

利用 Cayley-Hamilton 定理化简矩阵函数 $\cos M$ 。

9. 写出第 4 题中的时间演化矩阵 $U(t, 0)$ 并化简。

10. 第 4 题中的粒子，开始时处于静止状态。设粒子带有电荷 e ，并且受到电场

$$\vec{E} = E \cos \omega t \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

的驱动，求微振动解。

11. 一维阻尼振子的运动方程为

$$m\ddot{\eta} + \mu\dot{\eta} + k\eta = 0$$

引进相空间矢量 $(\eta(t), \dot{\eta}(t))$ ，方程可以改写成

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}$$

(1) 写出 2×2 矩阵 B 。

(2) 化简时间演化矩阵 $\exp(Bt)$ 。

(3) 如果系统受到冲击力

$$Q(t) = \delta(t - t')$$

的作用，求格林函数 $G(t, t')$ 。