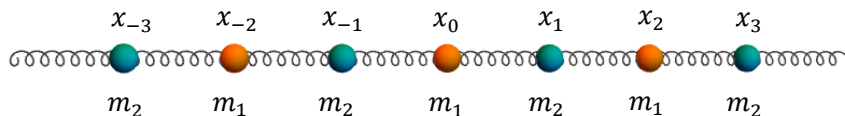


第五章 微振动

2025 年 11 月 27 日星期四

此题为拓展题，选做，不计入成绩：

5. 如图，质量为 m_1 和 m_2 的两种原子，交替排列成一维晶格，原子之间的间隔为 $a/2$ 。微振动坐标 $\{x_n(t)|n \in \mathbb{Z}\}$ 表示原子相对于平衡位置的偏移。



只考虑近邻原子之间的相互作用，取简谐近似，势函数为

$$V = \frac{1}{2}\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n - x_{n-1})^2$$

- (1) 写出系统的拉氏函数。
- (2) 对 n 是奇数和偶数两种情况，分别写出系统的运动方程。
- (3) 设

$$x_{2n}(t) = c_1 e^{-i\omega t} e^{in\theta}, \quad x_{2n+1}(t) = c_2 e^{-i\omega t} e^{in\theta}$$

代入运动方程，给出 c_1, c_2 满足的线性方程组。

- (4) 利用 c_1, c_2 有非零解的条件，求 $\omega^2 = \omega^2(\theta)$ 。
- (5) 所得的两组解，低频解 $\omega_A^2(\theta)$ 称为**声学支振动**，高频解 $\omega_O^2(\theta)$ 称为**光学支振动**。求声学支的最高频率 $\max(\omega_A)$ 和光学支的最低频率 $\min(\omega_O)$ 。
- (6) 计算 $\min(\omega_O) - \max(\omega_A)$ 。声学支与光学支之间有没有**频率禁带**？
- (7) 令

$$\theta = ka$$

给出色散关系 $\omega_A(k)$ 和 $\omega_O(k)$ 。

- (8) 当 $k \rightarrow 0$ 时，声学支有没有色散？光学支有没有色散？

6. 矩阵 A 满足特征方程

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

证明矩阵函数 $f(A)$ 满足方程

$$f(A)\vec{x} = f(\lambda)\vec{x}$$