

第四章 对称性和守恒量

2025 年 11 月 18 日星期二

5. 粒子在均匀引力场中自由下落，拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

- (1) 设初位移为 x_0 ，初速度为 v_0 ，求 $x(t)$ 。
- (2) 反解出 $x_0 = A(t, x, \dot{x})$, $v_0 = B(t, x, \dot{x})$ 。
- (3) 力学量 $A(t, x, \dot{x})$ 必然是守恒量，求对应的准对称变换。
- (4) 求力学量 $B(t, x, \dot{x})$ 对应的准对称变换。

此题选做，不计入成绩：

6. 试用最小作用量原理和伽利略协变性，推导牛顿三定律 (Newton's Three Laws of Motion)：

❶ Newton's First Law of Motion (Law of Inertia)

Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a straight line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.

❷ Newton's Second Law of Motion

The acceleration produced by a particular force acting on a body is directly proportional to the magnitude of the force and inversely proportional to the mass of the body.

❸ Newton's Third Law of Motion

To every action there is always opposed an equal reaction; or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

- translated from the "Principia"

提示：

- ① 讲义中的推论可以直接引用。
- ② 惯性定律可以利用单个质点的拉氏函数推得。
- ③ 为了证明第二定律，可以利用质点组的拉氏函数

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

- ④ 第三定律是关于两体相互作用的论断，你需要取 $N = 2$ 个质点组成的封闭体系讨论。
- ⑤ 是否能证明牛顿第三定律的强形式——“作用力和反作用力大小相等，方向相反，且在一条连线上”？这里的“在一条连线上”应该理解为“作用力与反作用力的力矩之和为零”。

7. 自由运动的慢子满足 Poincaré 不变性。请写出 Poincaré 变换对应的 10 个诺特守恒量。

8. 电磁场中带电质点拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q\phi(\vec{x}) + q\vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

考虑沿z轴正向的均匀静磁场，

$$\phi = 0, \quad \vec{A} = \frac{B}{2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$$

请先验证绕 z -轴的无穷小转动

$$x' = x - \epsilon y, \quad y' = y + \epsilon x, \quad z' = z,$$

是对称变换，然后写出对应的诺特守恒量。