

第四章 对称性和守恒量

2025 年 11 月 13 日星期四

共四题，选做其三：

1. Lane-Emden 方程是

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0$$

(1) 验证这个方程对应的拉氏函数是

$$L = t^2 \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{6} q^6 \right).$$

(2) 证明尺度变换

$$t' = \lambda t, \quad q'(t') = \lambda^{-\frac{1}{2}} q(t)$$

是对称变换。

(3) 推广到

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^n = 0$$

写出对应的拉氏函数，判断是否有尺度变换（准）对称性。

(4) 求尺度变换对应的诺特守恒量A。

(5) 计算dA/dt，并利用 Lane-Emden 方程验证等式dA/dt = 0。

2. 设振子与阻尼器耦合，阻力受到的阻力与速度成正比，运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

CK 拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2) \exp\left(\frac{\alpha}{m}t\right)$$

证明无穷小变换

$$t' = t + \epsilon, \quad x' = x - \epsilon \frac{\alpha x}{2m}$$

是准对称变换，并求出对应的诺特守恒量。

3. Goodwin 增长周期模型¹的拉氏函数是

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{v}}{v} \ln u - \frac{\dot{u}}{u} \ln v \right) + \left(\alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) \ln u - (\alpha + \gamma) \ln v + \frac{1}{\sigma} u + \rho v$$

(1) 请检验无穷小变换

$$\begin{aligned} t' &= t \\ u' &= \{1 + \epsilon [-(\alpha + \gamma) + \rho v]\} u \\ v' &= \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{1}{\sigma} (1 - u) - (\alpha + \beta) \right] \right\} v \end{aligned}$$

是否为准对称变换。

¹ R.M. Goodwin, A growth cycle, in C.H. Feinstein (Ed.), Socialism, Capitalism and Economic Growth, Cambridge University Press, Cambridge (1967).

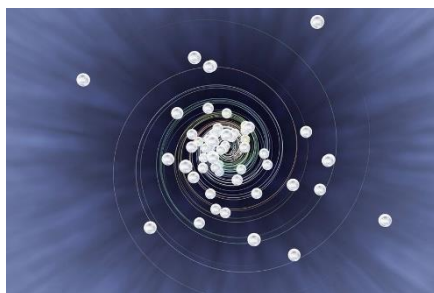
(2) 若上述变换是准对称变换, 请写出对应的诺特守恒量。

4. “完美光具组”能够把任意一点无像差地成像在共轭点。除了平面镜之外, 1854 年麦克斯韦提出的麦克斯韦鱼眼, 是唯一的完美光具组。鱼眼的折射率为

$$n(\vec{x}) = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2}$$

上式中 r 是到坐标原点的距离, 参数 $n_0 > 0, a > 0$ 。

近年来有人发现, 古老的鱼眼透镜可能还与量子纠缠有关:



Fish-eye lens may entangle pairs of atoms

图源 <https://news.mit.edu/2018/fish-eye-lens-may-entangle-pairs-atoms-0905>

(1) 请从拉氏函数验证, 几何光学中的鱼眼系统具有转动对称性。

(2) 写出转动对称对应的诺特守恒量。