

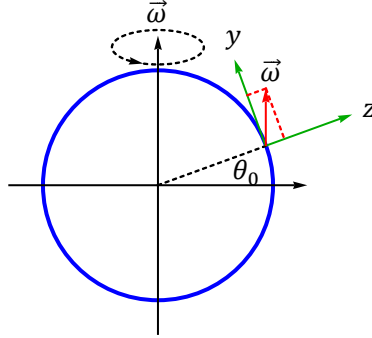
第三章 变分法与最小作用量原理

2025 年 11 月 11 日 星期二

20. 取地表向东方向为 x 轴正向，地表向北为 y 轴，垂直地表向上为 z 轴（ENU 坐标）。地球自转角速度沿着北极方向，在 ENU 坐标中的分量是

$$\vec{\omega} = (0, \omega_0 \cos \theta_0, \omega_0 \sin \theta_0)$$

其中 θ_0 是坐标原点附近的纬度。



在重力作用下，落体运动的拉氏函数应该写成

$$L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + m \dot{\vec{x}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) - mgz$$

(1) 设广义能量为 E 。用等能条件求出 dt 与弧长 $|d\vec{x}|$ 的关系。

(2) 用上述关系，化简哈密顿形式莫培督原理中的约化作用量

$$W[x, y] = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{x} = \int_{z_1}^{z_2} L_{\text{eff}} \left(z, x(z), y(z), \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz} \right) dz$$

其中的泛函宗量取成轨迹

$$x = x(z), \quad y = y(z)$$

给出 L_{eff} 的表达式。提示：阅读讲稿中的推导过程，注意 $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ ， $p_\alpha \neq \partial T / \partial \dot{q}_\alpha$ 。

(3) 讨论物体在高空从静止下落的情形， ω_0 和 $x, \frac{dx}{dz}, y, \frac{dy}{dz}$ 均为一阶小量。在拉格朗日函数 L_{eff} 中只需保留到二阶小量，写出 L_{eff} 的二阶近似表达式。

(4) 根据(3)的近似拉氏函数，写出落体的轨道方程。

(5) 设开始时质点静止于坐标原点，

$$x(z=0) = 0, \quad y(z=0) = 0, \quad E = 0$$

其中 E 是广义能量。

求下落高度 h 之后（ $z = -h$ ），偏东的距离 $x(-h)$ 。

21. 均匀弹簧固定在天花板上，弹簧下悬一重物。只考虑垂直方向的运动，记弹簧的偏移为

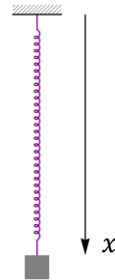
$$\psi(x, t), \quad x \in [0, a]$$

重物的坐标是

$$\psi(a, t) + a$$

设弹簧线密度为 ρ ，单位长度的弹性系数为 E ，重物质量是 m 。

(1) 写出作用量 $S[\psi]$ 。



- (2) 利用哈密顿原理求出拉格朗日方程和自然边界条件。
- (3) 所得的自然边界条件，即重物的运动方程。这个自然边界条件是否与牛顿第二定律一致？

22. 考虑例题中的一维弹性棒，假设棒的两端是自由的。

- (1) 求驻波解 $u_n(x)$ 和自然频率 ω_n 。
- (2) 已知初始条件

$$\begin{cases} \psi(x, t = 0) = \eta(x) \\ (\partial_t \psi)|_{t=0} = \xi(x) \end{cases}$$

求 $\psi(x, t)$ 。