

第三章 变分法与最小作用量原理

2025 年 11 月 6 日星期四

15. (Ritz 变分) 质点处于重力场中, 以向上为 y -轴正方向, 设其运动规律为

$$x(t) = a + bt + ct^2, \quad y(t) = d + et + ft^2,$$

求系统的作用量在积分后得到的显式表达式 $S(a, b, c, d, e, f)$, 然后利用 Hamilton 原理求待定系数 a, b, c, d, e, f 。提示: 对照讲义的例题, 应用哈密顿原理时需注意使用的正确边界条件。

16. 粒子在中心势中作平面运动, 拉格朗日函数是

$$L(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r^2}$$

我们把时间参数 t 和空间坐标 (r, θ) , 替换为新的“时间”参数 τ 和“空间”坐标 (u, v) , 即定义新的时空参数:

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \theta, \quad u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r}, \quad v \stackrel{\text{def}}{=} t$$

(1) 给出新时空参数下的拉格朗日函数 $\tilde{L}(\tau, u, v, du/d\tau, dv/d\tau)$, 其中

$$\tilde{L}d\tau \stackrel{\text{def}}{=} Ldt$$

这样才能保持作用量不变。

(2) 写出广义动量

$$p_u = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}}, \quad p_v = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{v}}$$

这里加点的符号表示对 τ 的微商。

(3) 写出广义能量

$$\tilde{H} = p_u \dot{u} + p_v \dot{v} - \tilde{L}$$

(4) 利用两个首次积分

$$\tilde{H} = -J, \quad p_v = -E$$

解出 $\dot{u}$ 。

(5) 对 $\dot{u}$ 积分, 求出 $u(\tau)$ 。

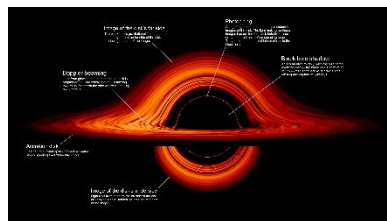
第 17, 18 两题选做其一:

17. 在黑洞的视界上方, 作为一个极简的模型, 我们把表面光速近似取为

$$v(x, y) = \alpha y$$

其中 x -轴为视界切向, y -轴为视界面的法向。

利用费马原理求光线的轨迹。



18. 设在阳光暴晒下, 马路上方空气折射率随高度 y 的变化规律为

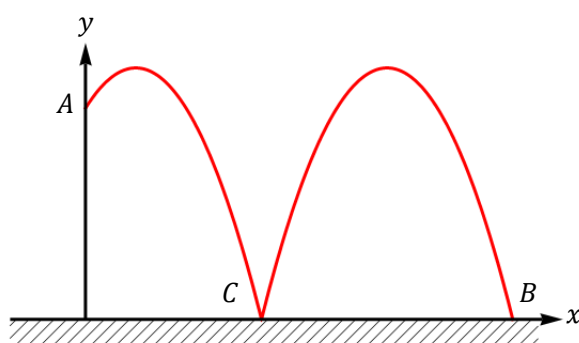
$$n(y) = n_0(1 + Ay), \quad A = 0.8 \times 10^{-6} \text{m}^{-1}$$

(1) 利用费马原理, 写出光线满足的微分方程。

(2) 一人站在马路上向前看, 能看到多远? 设此人眼睛离地面高度为 1.6m。

19. 在重力作用下, 初速为 v 的质点从垂直高度为 h 的 A 点出发, 落到水平距离为 w 的地面 B 点,

在此期间质点与地面发生过一次弹性碰撞。



(1) 以 $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ 为广义坐标，写出 Jacobi 形式的莫培督原理中的度规矩阵 $g_{\alpha\beta}(x, y)$ 和约化作用量 $W[x, y]$ 。

(2) 在作用量泛函中消去形式参数 λ ，把轨迹表示为 $y = y(x)$ ，求出作用量

$$W[y] = \int_0^w L(x, y, y') dx$$

(3) 弹性碰撞点 C 是角点，我们需要把作用量泛函写成分段积分形式，

$$W[y] = \int_0^{x_C} L(x, y, y') dx + \int_{x_C}^w L(x, y, y') dx$$

其中 C 点的横坐标 x_C 可变，纵坐标

$$y_C = 0 \Rightarrow \Delta y_C = 0$$

利用莫培督原理 $\delta W[y] = 0$ 给出欧拉-拉格朗日方程和角点条件。

(4) 解出轨迹 $y = y(x)$ 。