

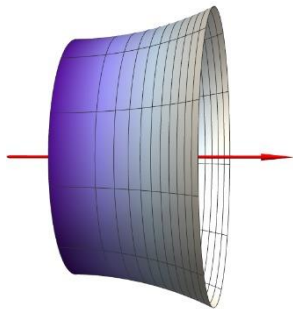
第三章 变分法与最小作用量原理

2025 年 11 月 4 日星期二

第 10-13 题选做其二，第 14 题必做：

10. （极小曲面）考虑 xy -平面上的两个固定点 A、B，用一条曲线 $y = y(x)$ 连接两点，然后将曲线绕 x -轴旋转一周得到旋转曲面。

（1）写出旋转曲面的面积 $S[y]$ ，求面积最小的形状。



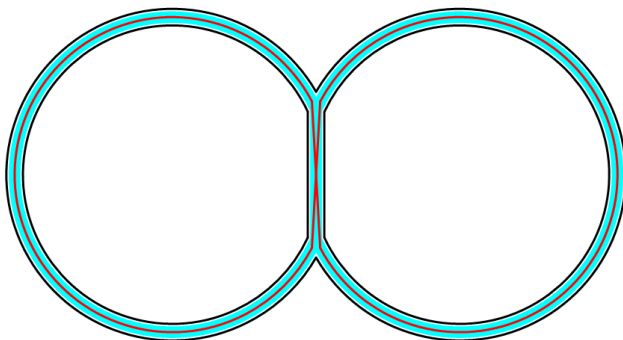
（2） $\delta S[y] = 0$ 确定的致极曲面，默认了母线 $y(x)$ 不是多值函数且没有角点，这有可能导致漏解。如果母线在两端有一段是垂直于对称轴（这时母线是多值函数）线段，那么极小曲面的形状是什么样的？

11. 英国物理学家 P. A. M. Dirac 预言的磁单极子（monopole），带有磁荷（magnetic charge）

$$g = n \frac{\hbar c}{2e}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

可以用超导线圈探测磁单极子。由于超导线圈完全抗磁，磁单极子穿过超导线圈后，线圈中会留下永久电流；磁单极子从线圈外穿过，则不会产生稳定的电流。通常使用量子超导干涉仪（SQUID）来检测超导线圈中的微小电流。

环形超导线圈抗干扰能力弱，环境磁场的扰动（扰动后稳定较长时间）同样能在线圈中产生电流，产生虚假信号。IBM 改进后的超导线圈，形状为对称“8”字形，环境磁场的均匀改变，在线圈的两个区域内磁通相反，不会引起线圈中的电流变化。



线圈必须放在装有液氮的管中以保持低温。管道越长，耗电越多。

为了节省长期运行费用，我们需要用最短的管子围出最大的面积。请设计“8”字形管的最佳形状。

12. 在 1489 年-1490 年，意大利的达芬奇（Leonardo da Vinci）创作了名画《抱银貂的女子》

(Lady with an Ermine)。这期间他思考过一个问题：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，那么项链所形成的曲线是什么？

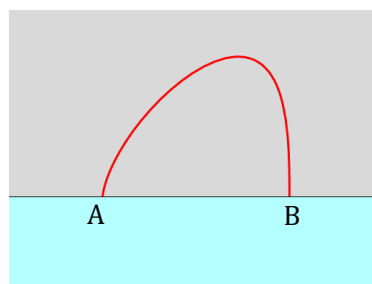


这是悬链线问题。达芬奇未能得到正确的形状，直到约翰·伯努利在 1696 年以此问题向欧洲的数学家们发起公开挑战。

考虑项链上串着一个坠子的情形：均匀链子上穿着一个小重物，重物可在绳子上自由滑动。固定链子的两端，求此悬链形状满足的方程和边界条件。

13. Dido's Problem

在古希腊传说中，腓尼基城邦泰尔发生叛乱之后，公主狄多与随从逃到北非的突尼斯，向雅布王请求能用一块牛皮围起来的土地。在得到允诺之后，她把牛皮剪成细绳，沿着海边圈占一大块土地，建立了迦太基城成为女王。



狄多问题是一个可动边界的条件极值问题：

- (1) x -轴上有两点 A、B（可在轴上变动），连接 AB 两点的曲线为

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

如果曲线的长度固定为 l_0 ，欲使曲线和 x -轴所包围的区域面积最大，求曲线形状。

- (2) 若 $|AB| = a$ 为固定值，求曲线形状。

(3) 若面元的价值为 $\rho(x, y) dx dy > 0$ ，欲使所围的面积价值最大，求曲线满足的微分方程和边界条件。

(4) 如果下方的边界不是 x -轴，而是曲线 $y = \varphi(x)$ ，求围取最大价值面积的曲线所满足的微分方程和边界条件。

14. 对第二章直立滚轮的例子，如果取扩展拉氏函数

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \lambda_1(t) (\dot{x} - R \sin \theta \dot{\varphi}) + \lambda_2(t) (\dot{y} + R \cos \theta \dot{\varphi})$$

则得到的欧拉-拉格朗日方程会多出哪些非物理项？