

第三章 变分法与最小作用量原理

2025 年 10 月 30 日星期四

以下两题选做其一：

6. Dean Taylor 通胀 (inflation) 的金融策略

设社会损失函数为

$$S[\pi] = \int_0^T \{\alpha \dot{\pi}^2 + \beta(\dot{\pi} + \rho\pi)^2\} e^{-\mu t} dt, \quad \alpha, \beta, \mu > 0, 0 < \rho < 1.$$

$$\pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T) = 0$$

求损失最小的预期通胀率 $\pi(t)$ 。

7. 埃文斯垄断模型 (G. C. Evans, Gerhard Tintner)

垄断企业生产一种商品，记单位时间的产量为 $q(t)$ ，单位时间的成本为

$$a_2 q^2 + a_1 q + a_0 \quad (a_0, a_1, a_2 > 0)$$

为了简化模型，假设企业能做到无库存运行，需求等于产量 $q(t)$ 。

单位时间的需求 $q(t)$ 依赖于定价 $p(t)$ ，设

$$q(t) = b_0 - b_1 p(t) + c \dot{p}(t)$$

上式中 b_0 代表与价格无关的刚性需求， $b_1 p(t)$ 项表示高价格会抑制需求。在预期商品将要降价时，一部分消费者会暂缓购买；预期提价则会使得一些消费者决定立即购买。这个特点建模为 $c \dot{p}(t)$ 项。

于是在固定的时间 T 内，企业获取的总利润为

$$\Phi[p] = \int_0^T \{p q - (a_2 q^2 + a_1 q + a_0)\} dt$$

定价策略决定利润。求最佳定价策略 $p(t)$ 。

8. 上世纪 50 年代，在物理学期刊《Physical Review》中，曾有人提出一种既能对图像 $I(x, y)$ 降噪、又不过分减弱边缘等高频细节的算法。

具体办法是求目标泛函

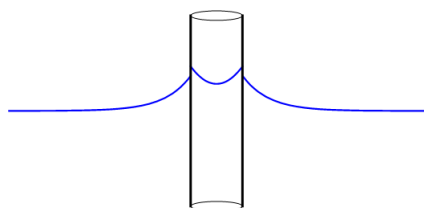
$$S[\psi] = \iint (\psi(x, y) - I(x, y))^2 dx dy$$

的极值，其中 $\psi(x, y)$ 是降噪后的图像，满足约束条件

$$\iint \sqrt{(\nabla \psi)^2} dx dy = c$$

这样图形中物体轮廓线（被 $\nabla \psi$ 近似描述）保持了一定的亮度，而降噪后的图形 $\psi(x, y)$ 又能尽量接近原来的含噪声图像 $I(x, y)$ 。

求 $\psi(x, y)$ 满足的欧拉方程。



9. 玻璃管垂直插在水里，求管内、外水面的形状满足的方程和边界条件。