

第三章 变分法与最小作用量原理

2025 年 10 月 28 日 星期二

3. 求本章习题 1 牛顿最小阻力体问题中泛函 $F[y]$ 的变分。(提示：①不要 copy 某些数学论文或物理书中的泛函，由于未考虑顶端平面，这些泛函表达式并不正确；②注意这是可动边界的变分。)

4. 一条固定长度的封闭曲线，在平面上能围出最大面积时的形状是圆形。

要利用变分法证明这个结论，需要先写出面积 S 、周长 L 与曲线形状的关系。设平面曲线的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

曲线是封闭的，即

$$x(0) = x(1), \quad y(0) = y(1)$$

(1) 写出泛函 $S[x, y]$ 和 $L[x, y]$ 。

(2) 计算变分 δS 和 δL 。与前面的问题一样，可以利用分部积分简化你的计算结果。

5. 伽利略、欧拉和牛顿等多位科学家曾设想一种重力隧道：把地球表面的地点 A 和 B，通过细长的地下通道相连。在通道中铺上铁轨。设列车在铁轨上无摩擦地运动，则在重力作用下，列车可以从 A 滑行到 B。

(1) 列车所需的运行时间 τ 是隧道形状 $r(\theta)$ 的泛函，写出表达式

$$\tau[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} F(r, r') d\theta, \quad r' \triangleq \frac{dr}{d\theta}$$

(2) 这里的广义能量积分

$$E = \frac{\partial F}{\partial r'} r' - F$$

是常数。设轨道最低点到地心的距离是 r_0 ，确定常数 E 。

(3) 利用广义能量积分解出 $dr/d\theta$ ，然后代入 $\tau[r]$ 的表达式以消去 θ 变量，积分求出列车所需的总运行时间 $\tau(r_0)$ 。所需积分公式可在数学手册中查找。

(4) 利用 $dr/d\theta$ 表达式，积分求出 $\theta(r)$ 。

(5) 利用 $\theta(r)$ 求出 A、B 两点在地球表面的距离 s ，给出列车耗时 $\tau(s)$ 。

