

第二章 拉格朗日力学

2025 年 10 月 16 日星期四

18. 考虑讲稿中冰橇运动的例题，该系统有没有循环坐标？广义能量是否守恒？

19. Goodwin's growth cycle model, 1967

Goodwin 增长周期模型是关于总产值与就业率的简单动力学模型，运动方程是

$$\begin{cases} \dot{u} = [-(\alpha + \gamma) + \rho v]u \\ \dot{v} = \left[\frac{1}{\sigma}(1 - u) - (\alpha + \beta) \right]v \end{cases}$$

这里 $u(t)$ 是劳动力收入占比， $v(t)$ 是就业率； α 是技术进步导致的生产力增长率， β 是劳动人口增长率， σ 是资本产出比， γ 和 ρ 是两个正的常数。

(1) 验证此模型存在拉格朗日函数（Fernandez-Nuñez, 1998）

$$L(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{v}}{v} \ln u - \frac{\dot{u}}{u} \ln v \right) + \left(\alpha + \beta - \frac{1}{\sigma} \right) \ln u - (\alpha + \gamma) \ln v + \frac{1}{\sigma} u + \rho v$$

(2) 写出广义能量积分 $H(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ 。

(3) 找出平衡点： $(u(t), v(t))$ 取什么样的初值 (u_0, v_0) ，才会不随时间变化？

(4) 把两个运动方程相除，可得 du/dv 不显式依赖于时间。积分求出 u, v 之间的函数关系。